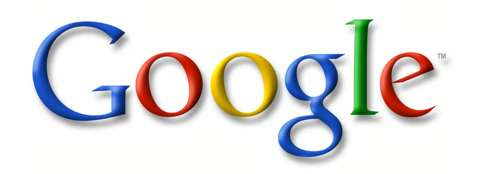
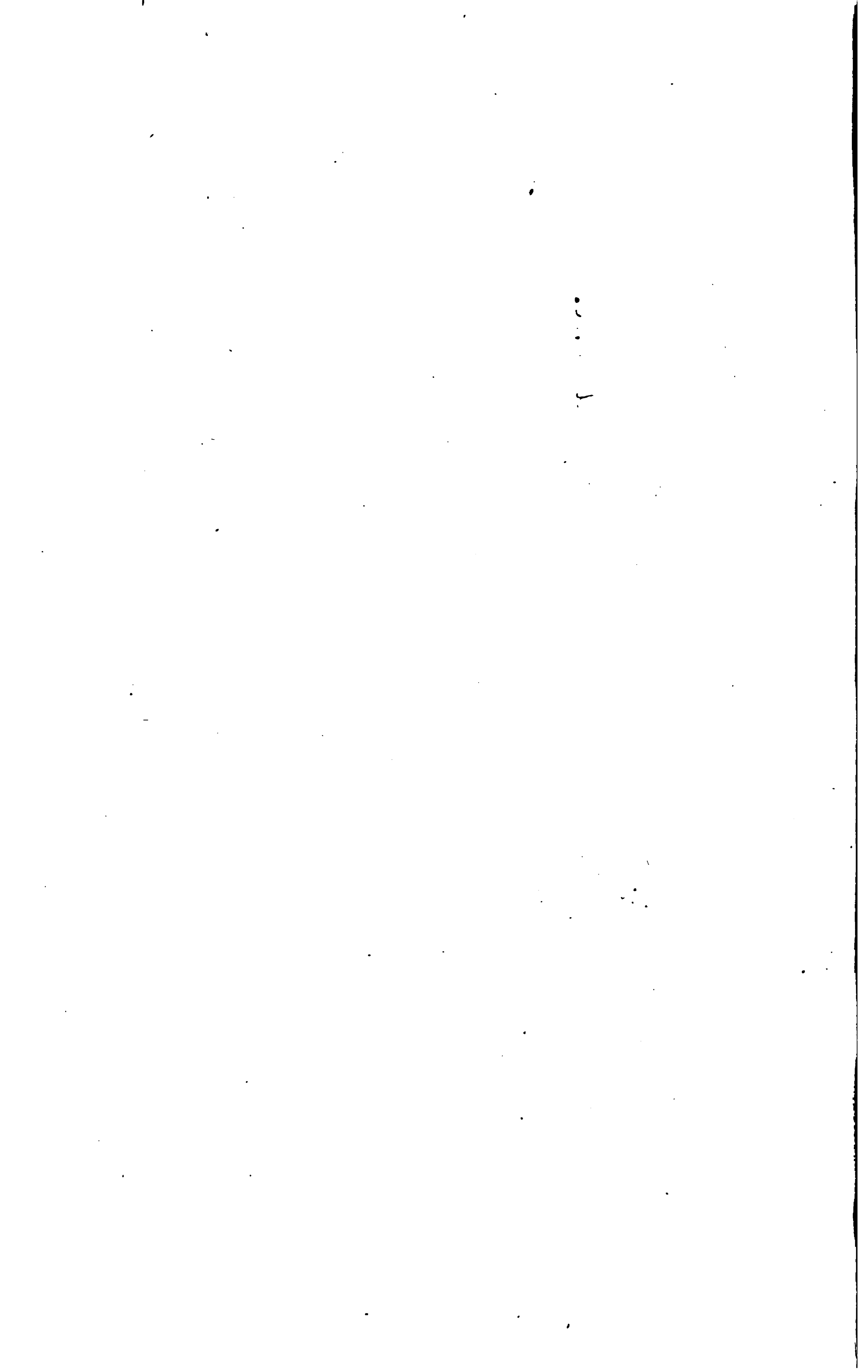





SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE





Die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht der isotropen elastischen Platte.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

der philosophischen Facultät der Universität zu Kiel

vorgelegt

und am 4. März Mittags 12 Uhr

in der kleinen Aula

vertheidigt von

Hugo Oeltjen
aus Eutin.

Opponenten:

1) Friedrich Claussen, stud. math.
2) Paul Sandmann, Realschullehrer.
3) Wilhelm Mau, stud. rer. nat.

Kiel.
Druck von C. F. Mohr (P. Peters.)
1881.

Imprimatur:
Dr. BACKHAUS,
z. Z. Decan.

Seinem theuren Vater

Gerd Oeltjen

Landesthierarzt des Fürstenthums Lübeck

in dankbarer Liebe.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat sich zur Aufgabe gestellt, die Differentialgleichungen für den Gleichgewichtszustand einer isotropen elastischen Platte abzuleiten, die als gerader Cylinder angesehen werden kann, dessen Höhe im Vergleich zu den Querdimensionen klein ist. Auf die Mantelfläche sowie Begrenzungsebenen der Platte sollen gegebene Kräfte von beliebiger Grösse und Richtung wirken und ausserdem das Innere derselben der Einwirkung der Schwerkraft unterworfen sein. Es wird aber nur eine solche Gleichgewichtslage betrachtet werden, bei der die elastischen Verschiebungen sehr klein ausfallen, wozu erforderlich ist, dass die gegebenen Druckkräfte eine bestimmte Grösse nicht überschreiten. Ueber das Gleichgewicht und die Schwingungen elastischer Platten haben, abgesehen von älteren Autoren, hauptsächlich Kirchhoff, Gehring und Clebsch Untersuchungen angestellt. Dieselben sind jedoch von der Annahme ausgegangen, dass die Dicke der Platte unendlich klein und nur die Mantelfläche von Druckkräften ergriffen sei. Im § 39 seines Lehrbuches »Theorie der Elasticität fester Körper« behandelt Clebsch allerdings einen Fall des Gleichgewichts, bei dem er die Dicke als endlich annimmt; indessen macht er daselbst die weitere Voraussetzung,

dass die in Richtung der Achse wirkenden elastischen Kräfte auch im Jnnern der Platte verschwinden.

Den im Folgenden angestellten Rechnungen ist die Methode des Herrn Prof. Dr. Pochhammer zu Grunde gelegt worden, welche derselbe in seinem Werke »Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes« (Kiel 1879, Abschnitt I) angewendet hat. Dort wird gezeigt, wie die Bedingung, dass beim Stabe die eine Dimension über die beiden anderen vorwaltet, von Anfang an in die Rechnung eingeführt, eine Eintheilung der in Frage kommenden Grössen in verschiedene Ordnungen ermöglicht, wodurch die allgemeinen Gleichungen in eine grössere Anzahl erheblich einfacherer zerfallen. In analoger Weise sollen hier die Differentialgleichungen abgeleitet werden, welche für das Gleichgewicht der Platte gelten, unter Benutzung des Umstandes, dass der Begriff der Platte ein Ueberwiegen zweier Dimensionen über die dritte bedingt.

---

§ I.

Eintheilung der zu betrachtenden Werthe nach Grössenordnungen.

Zunächst ist über die Lage des Coordinatensystems eine Wahl zu treffen. Dasselbe soll so gelegt werden, dass die z-Achse parallel zur Achse der Platte ist und die xy-Ebene mit der Mittelebene derselben zusammenfällt. Giebt man der Platte eine horizontale Lage, so fällt die Richtung der Schwerkraft in die der negativen z-Achse und die Componenten X_0 Y_0 Z_0 der äusseren Massenkraft werden:

$$X_0 = Y_0 = 0, \; Z_0 = -\Gamma$$

indem man durch Γ die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet.

Sämmtliche Punkte im Innern der Platte haben den bekannten Bedingungen des Gleichgewichts zu genügen:

$$(1.)\begin{cases} \dfrac{dX_x}{dx} + \dfrac{dX_y}{dy} + \dfrac{dX_z}{dz} = 0 \\ \dfrac{dY_x}{dx} + \dfrac{dY_y}{dy} + \dfrac{dY_z}{dz} = 0 \\ \dfrac{dZ_x}{dx} + \dfrac{dZ_y}{dy} + \dfrac{dZ_z}{dz} - D\Gamma = 0. \end{cases}$$

$$(2.)\begin{cases} X_x = a\,\frac{d\xi}{dx} + (a-2b)\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right) \\ Y_y = a\,\frac{d\eta}{dy} + (a-2b)\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\xi}{dx}\right) \\ Z_z = a\,\frac{d\zeta}{dz} + (a-2b)\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right) \\ Y_z = Z_y = b\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right) \\ Z_x = X_z = b\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right) \\ X_y = Y_x = b\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeutet D die anfängliche constante Dichtigkeit, während a und b die Elasticitätsconstanten des isotropen Mediums und ξ, η, ζ die Verrückungen eines Theilchens mit den ursprünglichen Coordinaten x,y,z sind.

Zu den obigen Gleichungen treten Oberflächenbedingungen, die den beim Stabe geltenden analog sind. Die Gleichungen der Begrenzungsebenen seien $z = + c$ und $z = - c$, die Richtungswinkel der nach aussen gerichteten Normale irgend eines Oberflächenelements λ, μ, ν und die Componenten der äusseren Druckkräfte bezogen auf die Flächeneinheit X, Y, Z; dann ist an der Mantelfläche $\cos\mu = \sin\lambda$ und $\nu = \frac{\pi}{2}$, während an den Begrenzungsebenen $\lambda = \mu = \frac{\pi}{2}$ und $\cos\nu = \pm 1$ ist. Die Oberflächenbedingungen werden also für die Mantelfläche

$$(3.)\begin{cases} X_x \cos\lambda + Y_x \cos\mu = X \\ X_y \cos\lambda + Y_y \cos\mu = Y \\ X_z \cos\lambda + Y_z \cos\mu = Z \end{cases}$$

und für die Endflächen

$$(4.)\quad X_z = \pm X,\ Y_z = \pm Y,\ Z_z = \pm Z$$

wo das positive Vorzeichen für die Ebene $z = + c$ und das negative für die Ebene $z = - c$ gilt.

Für die folgenden Betrachtungen macht man dem Begriff der Platte gemäss die Voraussetzung, dass, wenn der kleinste Durchmesser, welcher in einem beliebigen Punkte eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts gezogen werden kann, mit 2 l bezeichnet wird, das Verhältniss $\frac{c}{l}$ eine kleine Grösse sei. Man bemerke, dass diese Voraussetzung für Punkte in der Nähe des Randes nicht mehr zulässig ist, da sich hier Durchmesser ziehen lassen, welche von der Ordnung der Grösse c sind. Da nun die folgenden Rechnungen wesentlich auf der genannten Voraussetzung beruhen, so soll die ganze Randpartie der Platte soweit von der Betrachtung ausgeschlossen werden, dass das Angegebene nicht stattfinden kann. Das Folgende wird sich also nur auf solche Punkte der Platte beziehen, welche hinlänglich weit vom Rande der Platte entfernt sind. Wählt man die Längeneinheit von der Ordnung der Grösse l, so kann man kurz c als kleine Grösse betrachten. Es werden jetzt sämmtliche in Frage kommenden Werthe in Bezug auf c nach ihren Grössenordnungen eingetheilt, indem man die Ordnung von c^n als die nte und die von $\frac{1}{c^n}$ als die -nte bezeichnet. Man erkennt, dass z von derselben Grössenordnung wie c ist, während x, y als in keiner Beziehung zu c stehend zur Ordnung o gehören. Der letzteren Ordnung sind aus demselben Grunde die Grössen a, b, D, Γ, cos λ, cosμ, cosν beizurechnen, sowie die äusseren Druckkräfte X, Y, Z, da sie auf die Flächeneinheit bezogen sind.

Das Problem, die Differentialgleichungen für die unbekannten Verschiebungen ξ, η, ζ zu ermitteln, soll nun derartig in Angriff genommen werden, dass man ξ, η, ζ in

Bezug auf jene Ordnungen in verschiedene Summanden zerlegt und für letztere Gleichungen ableitet. Macht man die Annahme, dass die Unbekannten ξ, η, ζ nach z entwickelt werden können, wozu man durch die Kleinheit der Grösse z und die Stetigkeit des Vorganges berechtigt ist, so haben die einzelnen Glieder dieser Reihen die Form $A_m z^m$, wo A_m von z unabhängig ist. Hieraus ergiebt sich, dass durch Differentiation der verschiedenen Summanden von ξ η ζ nach z die Ordnung derselben um 1 erniedrigt wird, während die Differentiation nach x und y auf die Ordnung keinen Einfluss hat. Es sollen nun auch die elastischen Kräfte:

$$X_x, X_y, Y_y, X_z, Y_z, Z_z$$

in ihre der Ordnung nach verschiedenen Bestandtheile zerlegt werden. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die Ordnungen der Anfangsterme der 3 Kräfte X_x, X_y, Y_y im Allgemeinen die gleichen sein müssen, da letztere Kräfte sich in Bezug auf die z-Achse vollständig gleich verhalten. Bezeichnet man diese gemeinschaftliche Ordnung durch n, so ist:

$$(5.) \left\{ \begin{aligned} X_x &= X_{x,(n)} + X_{x,(n+1)} + \dots \\ X_y &= X_{y,(n)} + X_{y,(n+1)} + \dots \\ Y_y &= Y_{y,(n)} + Y_{y,(n+1)} + \dots \end{aligned} \right.$$

zu setzen, wenn durch $X_{x,(\nu)}$ $X_{y,(\nu)}$ $Y_{y,(\nu)}$ die Bestandtheile νter Ordnung der betreffenden Componenten zusammengefasst werden. Es soll indessen hierdurch nicht der Fall ausgeschlossen werden, dass gewisse der obengenannten Grössen $X_{x,(n)}$, $X_{y,(n)}$, $Y_{y,(n)}$ etc. den Werth o annehmen. Analog schliesst man, dass die Ordnungen der Anfangsglieder von X_z und Y_z im Allgemeinen einander gleich sind. Indem man durch n' diese Ordnung sowie durch n'' die Ordnung des Anfangsterms von Z_z bezeichnet, entstehen die Gleichungen:

$$(6.)\begin{cases} X_z = X_{z,(n')} + X_{z,(n'+1)} + \dots \\ Y_z = Y_{z,(n')} + Y_{z,(n'+1)} + \dots \\ Z_z = Z_{z,(n'')} + Z_{z,(n''+1)} + \dots \end{cases}$$

Werden die Werthe (5) und (6) in das Gleichungssystem (1) eingesetzt, so spaltet sich dasselbe in mehrere Systeme von Gleichungen von der Beschaffenheit, dass jede einzelne Gleichung nur Summanden von gleicher Grössenordnung enthält. Dies folgt aus der Erwägung, dass sich nur Glieder derselben Ordnung gegenseitig aufheben können. Man gelangt hierdurch zu Systemen von je drei zu (1) analogen Differentialgleichungen zwischen je sechs Werthen $X_{x,(\nu)}$, $X_{y,(\nu)}$, $Y_{y,(\nu)}$, $X_{z,(\nu+1)}$, $Y_{z,(\nu+1)}$, $Z_{z,(\nu+2)}$, und zwar kommen bei jeder einzelnen Gruppe deshalb die betreffenden Bestandtheile von X_x, X_y, Y_y, zusammen mit denjenigen Bestandtheilen X_z, Y_z, die der nächstfolgenden Ordnung angehören, und mit dem Bestandtheil der um 2 höheren Ordnung von Z_z vor, weil die Differentiation nach z die Ordnung um 1 erniedrigt. Diese Gleichungssysteme haben die Form:

$$\begin{cases} \frac{dX_{x,(\nu)}}{dx} + \frac{dX_{y,(\nu)}}{dy} + \frac{dX_{z,(\nu+1)}}{dz} = 0 \\ \frac{dY_{x,(\nu)}}{dx} + \frac{dY_{y,(\nu)}}{dy} + \frac{dY_{z,(\nu+1)}}{dz} = 0 \\ \frac{dZ_{x,(\nu+1)}}{dx} + \frac{dZ_{y,(\nu+1)}}{dy} + \frac{dZ_{z,(\nu+2)}}{dz} = \begin{cases} 0 \\ D\Gamma \end{cases} \end{cases}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist gleich $D\,\Gamma$ für $\nu = -1$, da alsdann auch links Grössen 0 ter Ordnung stehen; für jeden anderen Werth von ν ist dieselbe gleich 0.

Gleichzeitig zerlegt sich jede der Oberflächenbedingungen (3.) und (4.) in eine Reihe von verschiedenen Gleichungen. Da die rechten Seiten von (3.) und (4.)

sämmtlich von der 0ten Ordnung sind, so müssen die links stehenden Terme, welche zu einer beliebigen anderen als der 0ten Ordnung gehören, stets für sich die Summe Null haben.

In dem obigen Systeme von Gleichungen werde zunächst $\nu = n$ gesetzt, wodurch man die Beziehungen zwischen $X_{x,(n)}$, $X_{y,(n)}$, $Y_{y,(n)}$, den Bestandtheilen beträchtlichster Ordnung von X_x, X_y, Y_y, und den Grössen $X_{x,(n+1)}$ $Y_{z,(n+1)}$ $Z_{z,(n+2)}$ erhält. Diese Gleichungen in Verbindung mit den zugehörigen Oberflächenbedingungen führen zu dem Schlusse, dass $n \geqq -2$ ist. In der That würden für $n < -2$ die sechs Ausdrücke:

$$X_{x,(n)},\ X_{y,(n)},\ Y_{y,(n)},\ X_{z,(n+1)};\ Y_{z,(n+1)},\ Z_{z,(n+2)}$$

sämmtlich von negativer Grössenordnung sein und daher für dieselben aus den Gleichungen (3.) und (4.), deren rechte Seiten die Ordnung Null haben, die Grenzbedingungen:

$$\left\{\begin{array}{l} X_{x,(n)} \cos\lambda + Y_{x,(n)} \cos\mu = 0 \\ X_{y,(n)} \cos\lambda + Y_{y,(n)} \cos\mu = 0 \\ X_{z,(n+1)} \cos\lambda + Y_{z,(n+1)} \cos\mu = 0 \end{array}\right.$$

längs der Mantelfläche, sowie:

$$X_{z,(n+1)} = 0,\quad Y_{z,(n+1)} = 0,\quad Z_{z,(n+2)} = 0$$

für $z = \pm c$ folgen. Diesen Differentialgleichungen und Grenzbedingungen kann man aber durch die Werthe:

$$X_{x,(n)} = X_{y,(n)} = Y_{y,(n)} = X_{z,(n+1)} = Y_{z,(n+1)} = Z_{z,(n+2)} = 0$$

genügen, wodurch die nächstfolgende Gruppe diejenige wird, welche die Anfangsglieder von X_x, X_y, Y_y liefert. Die alleinige Möglichkeit dieser Lösung ergiebt sich daraus, dass elastische Kräfte nur in Folge gegebener äusserer Kräfte auftreten können. Wie man aber aus dem Vorhergehenden ersieht, kommen für $n < -2$ weder äussere

Druckkräfte noch die Schwerkraft zur Anwendung. Die Bedingungen des Problems erfordern also niemals eine beträchtlichere Grössenordnung für die Componenten X_x, X_y, Y_y als die -2 te. Demgemäss kann in (5.) für n die Zahl -2 substituirt werden, jedoch in dem Sinne, dass die Ausdrücke $X_{x,(-2)}$, $X_{y,(-2)}$, $Y_{y,(-2)}$, in gewissen Fällen auch der Null gleich sein können.

Um nun auch die Anfangsordnung n' der Kräfte X_z, Y_z, zu ermitteln, setze man die Werthe $X_{z,(\mu)}$ $Y_{z,(\mu)}$, wobei $\mu < -1$ genommen werden soll, in die beiden ersten Gleichungen (1.) ein. Dann ergeben sich die Relationen:

$$\frac{dX_{z,(\mu)}}{dz} = \frac{dY_{z,(\mu)}}{dz} = 0$$

da in den eben erwähnten Gleichungen die Differentialquotienten von X_x, X_y, Y_y (wegen $n \geqq -2$) eine höhere Ordnung als die obigen Differentialquotienten haben. Die Ausdrücke $X_{z,(\mu)}$, $Y_{z,(\mu)}$ ergeben sich also als Funktionen von x, y allein, welche gleich Null sein müssen, da nach (4.) die einer negativen Ordnung angehörigen Bestandtheile von X_z, Y_z für $z = \pm c$ verschwinden. Analoge Schlüsse gelten für die Componente Z_z. Für einen Ausdruck $Z_{z,(\mu)}$ in welchem μ negativ ist, ergiebt sich aus der 3. Gleichung (1.) die Bestimmung:

$$\frac{dZ_{z,(\mu)}}{dz} = 0$$

da, wie oben gezeigt, die Grössen $\frac{dX_z}{dx}$ und $\frac{dY_z}{dy}$ keine beträchtlichere Ordnung als die -1 te annehmen, der Differentialquotient $\frac{dZ_{z,(\mu)}}{dz}$ dagegen von der -2 ten oder einer niederen Ordnung ist. Mit Hülfe der 3. Gleichung (4.) folgert man in bekannter Weise, dass $Z_{z,(\mu)}$, weil $\mu < 0$

ist, für sämmtliche Punkte der Platte verschwinden muss. Somit ist in (6.)

$$n' = -1, \quad n'' = 0$$

zu setzen. In den specielleren Fällen, wo die Componenten X_z, Y_z, Z_z sich auf eine höhere Ordnung reduciren (dies tritt hauptsächlich ein, wenn X_x, X_y, Y_y eine höhere Ordnung als die — 2te annehmen), verschwinden die Anfangsglieder $X_{z,(-1)}$, $Y_{z,(-1)}$, $Z_{z,(0)}$ der rechten Seiten von (6.). Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich, dass man die Behandlung des allgemeinen Problems in der Art zu versuchen haben wird, dass man die Frage stellt:

Von welcher Form müssen die Verschiebungen ξ, η, ζ sein, damit die Ordnung von X_x, X_y, Y_y gleich -2, die von X_z, Y_z gleich -1 und die von Z_z gleich 0 sei?

Hierauf soll in den folgenden Paragraphen näher eingegangen werden.

Die Schlüsse in Betreff der Grössenordnungen der Componenten X_x, X_y, Y_y, Y_z, Y_z, Z_z hätte man auch dadurch ableiten können, dass man in analoger Weise, wie Herr Professor Pochhammer im § II seines citirten Werkes verfährt, die Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems für Theile der betrachteten Platte aufstellt. Denkt man sich die Platte im ursprünglichen Zustande durch eine Cylinderfläche, deren Achse parallel der z-Achse und deren Leitcurve in der xy-Ebene eine beliebige, jedoch ganz innerhalb der Umgrenzung der Platte verlaufende Curve ist, in 2 Theile zerschnitten, so finden nach der Deformation bei jedem Theil zwischen den gegebenen Kräften einerseits und den längs der Schnittfläche auftretenden inneren Druckkräften andererseits die 6 Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems statt. Dieselben sollen im Folgenden für

den äusseren Abschnitt der Platte abgeleitet werden, da sie im § V eine Anwendung finden werden.

Man bezeichne die auf die innere Mantelfläche des betreffenden Abschnitts wirkenden Druckcomponenten bezogen auf die Flächeneinheit durch X_n, Y_n, Z_n, wo der Index n die in das Innere des äusseren Theiles gezogene Normale bedeutet. Nenn man ferner das Bogenelement der Leitcurve d , so sind die Componenten der auf das Element dz ds der inneren Mantelfläche wirkenden Kraft:

$$-X_n\, dz\, ds, \quad -Y_n\, dz\, ds, \quad -Z_n\, dz\, ds.$$

In Folge dessen liefern die inneren Druckkräfte zu den 3 Componentensummen des starren Systems die Beiträge:

$$-\iint X_n\, dz\, ds, \quad -\iint Y_n\, dz\, ds, \quad -\iint Z_n\, dz\, dz$$

wo die Doppelintegrale über die ganze innere Mantelfläche auszudehnen sind. Nach Einführung der Richtungswinkel Λ, M, N der Normale n erhält man, da $N = 90^0$ ist, die bekannten Formeln:

$$(7.)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos\Lambda + Y_x \cos M \\ Y_n = X_y \cos\Lambda + Y_y \cos M \\ Z_n = X_z \cos\Lambda + Y_z \cos M \end{cases}$$

welche in die obigen Integrale zu substituiren sind. Ausser den inneren sind noch die äusseren Druckkräfte und die Schwerkraft in Rechnung zu ziehen. Um zunächst erstere zu berücksichtigen, nenne man das Element der Randcurve, welches die xy Ebene aus der Mantelfläche der Platte herausschneidet, $d\sigma$. Nimmt man das Element dz hinzu, welches auf $d\sigma$ senkrecht steht, so ist $d\sigma\, dz$ ein unendlich kleines Rechteck, welches als Element der äusseren Mantelfläche anzusehen ist. In diesem greifen die Kräfte $X(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, $Y(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, $Z(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ an, wobei die eingeklammerten Buchstaben $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ bedeuten, dass die Funktionen für $x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$ zu nehmen

sind, welche Bezeichnung für die Coordinaten des äusseren Plattentheils eingeführt werden soll, da die Buchstaben x, y für die Leitcurve in Anspruch genommen sind. Von der äusseren Mantelfläche rühren also die Kräftesummen:

$$\int d\sigma \int_{-c}^{+c} X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz, \int d\sigma \int_{-c}^{+c} Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz, \int d\sigma \int_{-c}^{+c} Z(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz$$

her, in welchen die Integration nach σ über die ganze äussere Randcurve zu erstrecken ist. Indem man analog durch $X_{(c)}$, $Y_{(c)}$, $Z_{(c)}$; $X_{(-c)}$, $Y_{(-c)}$, $Z_{(-c)}$ die Werthe der Functionen X, Y, Z einerseits für das Argument $z = c$ andererseits für das Argument $z = -c$ bezeichnet, erhält, man die auf die Begrenzungsebenen $z = c$ und $z = -c$ bezüglichen Ausdrücke:

$$\iint (X_{(c)} + X_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

$$\iint (Y_{(c)} + Y_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

$$\iint (Z_{(c)} + Z_{(-c)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

Die Schwerkraft trägt endlich zu den Componenten parallel der z—Achse den Werth:

$$-2cD\Gamma \iint d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

bei. In diesem Integral, sowie in den drei vorigen, ist die doppelte Integration nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ über das von der Rand- und Leitcurve abgegrenzte Flächenstück der xyEbene auszuführen. Die ersten 3 Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems fordern nun bekanntlich das Verschwinden der Componentensummen. Es entstehen also, wenn man zur Abkürzung:

$$
(8.)\quad \begin{cases}
f_0 = \iint (X_{(c)} + X_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
g_0 = \iint (Y_{(c)} + Y_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
h_0 = \iint (Z_{(c)} + Z_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
f_1 = \int ds \int_{-c}^{+c} X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz \\
g_1 = \int ds \int_{-c}^{+c} Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz \\
h_1 = \int ds \int_{-c}^{+c} Z(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz - 2\, c\, D \Gamma \iint d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}
\end{cases}
$$

setzt, die Gleichungen:

$$
(9.)\quad \begin{cases}
\iint X_n\, dz\, ds = f_0 + f_1 \\
\iint Y_n\, dz\, ds = g_0 + g_1 \\
\iint Z_n\, dz\, ds = h_0 + h_1 .
\end{cases}
$$

Wie man leicht erkennt, sind die Grössen f_0 g_0 h_0 h_1 abhängig von der Gestalt und den Dimensionen der Leitcurve. Die Grössen f_1 g_1 dagegen sind constant.

Bei der Aufstellung der Drehungsmomente mögen die Hebelarme vom Coordinatenanfangspunkt aus gerechnet werden. Für die an der Schnittfläche angreifenden Kräfte $-X_n$, $-Y_n$, $-Z_n$ sind dann die Hebelarme parallel der x-, y- und z-Achse resp. gleich x, y, z. Es tragen also diese Kräfte zu der Drehung um die x-, y- und z-Achse der Reihe nach die Ausdrücke:

$$-\iint (y Z_n - z Y_n) \, dz \, ds$$

$$-\iint (z X_n - x Z_n) \, dz \, ds$$

$$-\iint (x Y_n - y X_n) \, dz \, ds$$

bei. Die in Folge der Deformation auftretenden Aenderungen der Hebelarme sind hierbei allerdings vernachlässigt. Jedoch geben diese mit den Kräften multiplicirt nur zu Produkten Veranlassung, welche die zweite Dimension in Bezug auf die neun ersten Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach x, y, z haben und deshalb nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Hinsichtlich der Kräfte, die auf das Element $dz \, d\sigma$ der äusseren Mantelfläche wirken, sind die Hebelarme der Reihe nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, z. Diese Kräfte liefern also die Beiträge:

$$\int d\sigma \int_{-c}^{+c} [\mathfrak{y} \, Z(\mathfrak{x} \, \mathfrak{y}) - z \, Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \, dz$$

$$\int d\sigma \int_{-c}^{+c} [z \, X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{x} \, Z(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \, dz$$

$$\int d\sigma \int_{-c}^{+c} [\mathfrak{x} \, Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{y} \, X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \, dz.$$

Von dem Flächenstück in der Ebene $z = + c$ rühren, da die Hebelarme gleich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, c zu nehmen sind, die Drehungsmomente:

$$\iint \mathfrak{y} \, Z_{(c)} \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y} - c \iint Y_{(c)} \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y}$$

$$c \iint X_{(c)} \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y} - \iint \mathfrak{x} \, Z_{(c)} \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y}$$

$$\iint (\mathfrak{x} Y_{(c)} - \mathfrak{y} X_{(c)}) \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y}$$

her und analog von der Begrenzungsebene $z = -c$ die Ausdrücke:

$$\iint \mathfrak{y}\, Z_{(-c)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + c \iint Y_{(-c)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

$$-c \iint X_{(-c)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} - \iint \mathfrak{x}\, Z_{(-c)}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

$$\iint (\mathfrak{x}\, Y_{(-c)} - \mathfrak{y}\, X_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

Endlich erhält man als Beiträge der Schwerkraft zu den Drehungsmomenten um die x- und y-Achse:

$$-2\, c\, D\, \Gamma \iint \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

$$2\, c\, D\, \Gamma \iint \mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

Die Integrationsgrenzen sämmtlicher zu den Drehungsmomenten gehörigen Ausdrücke sind dieselben wie die der Integrale der Componentensummen. Führt man jetzt zur Abkürzung die Werthe:

$$(10.) \left\{ \begin{aligned}
F_0 &= \iint \mathfrak{y}\, (Z_{(c)} + Z_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
G_0 &= \iint \mathfrak{x}\, (Z_{(c)} + Z_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
H_0 &= \iint [\mathfrak{x}\, (Y_{(c)} + Y_{(-c)}) - \mathfrak{y}\, (X_{(c)} + X_{(-c)})]\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
F_1 &= \int d\sigma \int_{-c}^{+c} \mathfrak{y}\, Z\, (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\, dz - c \iint (Y_{[c]} - Y_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} - 2cD\Gamma \iint \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
G_1 &= \int d\sigma \int_{-c}^{+c} \mathfrak{x}\, Z\, (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\, dz + c \iint (X_{(c)} - X_{(-c)})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + 2cD\Gamma \iint \mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \\
H_1 &= \int d\sigma \int_{-c}^{+c} [\mathfrak{x}\, Y\, (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{y}\, X\, (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})]\, dz \\
F_2 &= - \int d\sigma \int_{-c}^{+c} z\, Y\, (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz \\
G_2 &= \int d\sigma \int_{-c}^{+c} z\, X\, (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dz
\end{aligned} \right.$$

ein, so entstehen die weiteren 3 Gleichgewichtsbedingungen, wonach die Summe der Drehungsmomente genommen für jede Achse verschwinden muss. Diese sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} \iint (yZ_n - zY_n)\, dz\, ds = F_0 + F_1 + F_2 \\ \iint (zX_n - xZ_n)\, dz\, ds = G_0 + G_1 + G_2 \\ \iint (xY_n - yX_n)\, dz\, ds = H_0 + H_1 \end{cases}$$

Die Grössen F_0, F_1, G_0, G_1, H_0, sind abhängig von der Gestalt und Lage der Leitcurve, F_2, G_2, H_1 dagegen sind constant.

Was nun die Grössenordnung der Werthe (8.) und (10.) anbelangt, so sind die Indices so gewählt, dass sie zugleich die Ordnung der zugehörigen Ausdrücke angeben, wie sich ergiebt, wenn man bedenkt, dass der Flächeninhalt der inneren und äusseren Mantelfläche die Ordnung 1 und der Flächeninhalt der in den Ebenen $z = \pm c$ abgegrenzten Stücke die Ordnung o hat. Die früher gefundene Classification der elastischen Kräfte X_x, X_y, Y_z, X_z, Y_z, Z_z nach Grössenordnungen wird also durch die Gleichungen (9.) und (11.) mit Hinzuziehung der Werthe (7.) bestätigt. Indessen ist zu beachten, dass die Terme o ter Ordnung in (8.) und (10.) in ihrer Ordnung erhöht werden, wenn man die Leitcurve des Schnittcylinders in der Nähe des Randes der Platte verlaufen lässt, weil dann die in den Ebenen $z = \pm c$ abgeschnittenen Flächenstücke nicht mehr von der Ordnung o sind, da der Abstand der Leitcurve von dem Rande zur Ordnung der Grösse c gehört. Dies ist ein weiterer Grund für die Ausschliessung der Randpartie der Platte. In Folge dessen kommen für die in dem § IV abgeleiteteten Differentialgleichungen die Bedin-

gungen (3.), welche sich auf die Mantelfläche der Platte beziehen, nicht zur Anwendung. Zum Ersatz für diese werden die Gleichungen (9.) und (11.) eintreten. In der That gehören die Vorgänge, welche am Rande auftreten, in ein anderes Gebiet, nämlich in die Theorie des Gleichgewichts eines isotropen elastischen Ringes.

Schliesslich sei hier eines Umstandes gedacht, der bei der Ermittelung der Werthe von ξ, η, ζ in Frage kommt. Bekanntlich ist die Gleichgewichtslage eines elastischen Körpers, auf den gegebene Kräfte wirken, in eindeutiger Weise bestimmt, falls der Körper als starr betrachtet im Raum gegeben ist (siehe Clebsch, Elasticitätstheorie § 21). Nun werden in den abzuleitenden Werthen von ξ, η, ζ der Reihe nach Grössen von der Form:

$$(12.)\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 + \gamma y - \beta z \\ \beta_0 + \alpha z - \gamma x \\ \gamma_0 + \beta x - \alpha y \end{array}\right.$$

auftreten, wo α_0, β_0, γ_0, α, β, γ willkührliche Constanten bedeuten, welche sich eben auf die Lage der als starr angesehenen Platte im Raume beziehen. Da aber im vorliegenden Falle nur die elastischen Verschiebungen interessiren, so werden überall, wo diese Terme vorkommen, die sechs willkührlichen Constanten gleich Null gesetzt werden.

§ II.

Die Form der Functionen ξ, η, ζ.

Man unterscheide die verschiedenen Theile der Unbekannten ξ, η, ζ in Bezug auf ihre Grössenordnungen durch besondere Buchstaben. Den Gliedern von ξ, η, deren Ordnung niedriger, als die — 2te ist, gebe man die Zeichen U, V, den Gliedern -2ter und -1ter Ordnung dagegen die Zeichen U_1, V_1. Die Reste von ξ, η, welche sämmtliche

Die Schreibweise ist so gewählt, dass in den 3 ersten Gleichungen die ersten Zeilen die Terme von einer niederen Ordnung als der -2ten, die zweiten Zeilen die Terme -2ter und -1ter Ordnung und die letzten Zeilen die Glieder der höheren Ordnungen bedeuten. In ähnlicher Weise sind die Ausdrücke für die Kräfte X_y, X_z, Y_z geordnet. In dem Ausdrucke von X_y umfasst die erste Klammer die Glieder, deren Ordnung niedriger als die -2te ist, während die ersten Klammern der Werthe von X_z, Y_z die Terme bezeichnen, die einer niederen Ordnung als der -1ten angehören.

Nach der Bedingung, die im vorigen Paragraphen über die Anfangsordnung der elastischen Kräfte aufgestellt ist, ergeben sich also folgende Gleichungssysteme:

$$(14.)\quad \begin{cases} a\frac{dU}{dx}+(a-2b)\left(\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)=0 \\ a\frac{dV}{dy}+(a-2b)\left(\frac{dW}{dz}+\frac{dU}{dx}\right)=0 \\ a\frac{dW}{dz}+(a-2b)\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\right)=0 \\ a\frac{dW_1}{dz}+(a-2b)\left(\frac{dU_1}{dx}+\frac{dV_1}{dy}\right)=0 \end{cases}$$

$$(15.)\quad \begin{cases} \frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dx}=0 \\ \frac{dW}{dx}+\frac{d(U+U_1)}{dz}=0 \\ \frac{dW}{dy}+\frac{d(V+V_1)}{dz}=0 \end{cases}$$

Die drei ersten Gleichungen (14.), welche in Bezug auf die Unbekannten $\frac{dU}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dW}{dz}$ homogen sind, liefern, da die Determinante $\begin{vmatrix} a & a-2b & a-2b \\ a-2b & a & a-2b \\ a-2b & a-2b & a \end{vmatrix}$ von Null verschieden ist, die Gleichungen:

$$(16.) \left\{ \frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy} = \frac{dW}{dz} = 0 \right.$$

Führt man nämlich die Determinante aus, so erhält man $4b^2\,(3a-4b)$ als Werth derselben, welcher nur durch das Verschwinden der Klammer zu o wird. Dies darf aber nicht stattfinden, da eine Relation $3a-4b=0$ zwischen den elastischen Constanten nicht existirt. Differentiirt man die beiden letzten Gleichungen (15.) nach z, so erhält man, da W von z unabhängig ist, die Relationen:

$$\frac{d^2\,(U+U_1)}{dz^2} = \frac{d^2(V+V_1)}{dz^2} = 0$$

welche wegen der Verschiedenheit der Ordnungen von U, V und U_1, V_1 in:

$$(17.) \left\{ \frac{d^2U}{dz^2} = \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2U_1}{dz^2} = \frac{d^2V_1}{dz^2} = 0 \right.$$

zerfallen. Die Functionen U und V haben also mit Berücksichtigung von (16.) die Form:

$$(18.) \left\{ U = z\,\varphi + \varphi_1 \ ; \ V = z\,\psi + \psi_1 \right.$$

wo φ und φ_1 unbekannte Functionen von y, ψ und ψ_1 dagegen von x allein bedeuten. Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung (15.) ein, so ergiebt sich:

$$z\,\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dy} + z\,\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi_1}{dx} = 0$$

oder:

$$z\left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx}\right) = -\left(\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\psi_1}{dx}\right) .$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Werthe von z, also hat man zu setzen:

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\psi_1}{dx} = 0$$

Die Gleichung $\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx}$ kann nur bestehen, falls beide Seiten gleich einer und derselben Constanten A sind, da die linke Seite nur von y und die rechte nur von x ab-

hängt. Dasselbe gilt von der Gleichung $\frac{d\varphi_1}{dy} = - \frac{d\psi_1}{dx}$, nur dass man hier beide Seiten gleich einer anderen Constanten B setzt. Hierdurch enstehen für φ, φ_1, ψ, ψ_1 die Ausdrücke

$$\varphi = Ay + A_1 \quad , \quad \psi = - Ax + A_2$$
$$\varphi_1 = By + B_1 \quad , \quad \psi = - Bx + B_2$$

wobei A_1 A_2 B_1 B_2 die willkührlichen Integrationsconstanten bedeuten. Substituirt man die soeben ermittelten Werthe in (18.), so folgt:

$$U = Ayz + By + A_1z + B_1$$
$$V = - Axz - Bx + A_2z + B_2.$$

Da nun U und V Bestandtheile der Verschiebungen ξ η sind, so kann man nach (12.) die Terme:

$$By + A_1 z + B_1 \quad , \quad - Bx + A_2 z + B_2$$

fortlassen. Ferner lässt sich zeigen, dass die Constante A gleich Null sein muss. Differentiirt man nämlich die zweite der Gleichungen (15.) nach y und die dritte nach x, zieht hierauf beide von einander ab, so kommt:

$$\frac{d^2(U+U_1)}{dy\,dz} - \frac{d^2(V+V_1)}{dx\,dz} = 0$$

oder wegen der Verschiedenheit der Ordnungen:

$$(19.) \left\{ \frac{d^2U}{dy\,dz} = \frac{d^2V}{dx\,dz}, \quad \frac{d^2U_1}{dy\,dz} = \frac{d^2V_1}{dx\,dz} \right.$$

Setzt man in die erste der beiden letzten Gleichungen die Werthe:

$$U = Ayz \quad , \quad V = - Axz$$

ein, so erhält man $A = - A$.

Hieraus ergiebt sich sofort $A = 0$, mithin ist das Resultat der ganzen Untersuchung:

$$U = V = 0$$

d. h. die Ordnung der Verrückungen ξ, η kann nicht niedriger als die zweite sein.

Aus den Gleichungen (16.) schliesst man, dass die Function W nur von x und y abhängt. Als solche bezeichne

man sie durch H. Nach der Definition von W werden durch H die Glieder von ζ dargestellt, deren Ordnung kleiner als die -1 te ist. In Folgendem soll jetzt gezeigt werden, dass die niedrigste Ordnung die -3te ist, so dass H nur Glieder -3ter und -2ter Ordnung umfasst.

Die Integration der beiden letzten Gleichungen (15.) liefert:

$$H = -\int \frac{dU_1}{dz} dx + \varrho (y)$$

$$H = -\int \frac{dV_1}{dz} dy + \sigma (x)$$

wo durch die Klammern angedeutet ist, dass ϱ nur von y, σ nur von x abhängt. In diesen Ausdrücken haben die Integrale ausschliesslich die Ordnung -3 und -2, da die zu integrirenden Functionen $\frac{dU_1}{dz}$ $\frac{dV_1}{dz}$ von der -3ten und -2ten Ordnung sind und die Integration nach x und y die Ordnung nicht ändert. Eine niedrigere Ordnung von H als die -3te kann daher nur von den unbekannten Functionen ϱ und σ herrühren. Bezeichnet man also die Glieder der -3ten und -2ten Ordnung von ϱ und σ mit ϱ_0 und σ_0, die der niederen Ordnungen durch ϱ_1 und σ_1, so hat man, da die beiden Ausdrücke für H gleich sein müssen, die Gleichung:

$$\sigma_1 = \varrho_1$$

indem die Glieder gleicher Grössenordnung einander gleich zu setzen sind. Die letzte Gleichung aber erfordert $\varrho_1 = \sigma_1$ $=$ const. Weil nun die Constanten in den Ausdrücken für ξ, η, ζ weggelassen werden sollen, so ist erwiesen, dass H nur Glieder -3ter und -2ter Ordnung umfasst.

Die Gleichungen:

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{dU_1}{dz}, \quad \frac{dH}{dy} = - \frac{dV_1}{dz}$$

geben ferner nach z integrirt, für die Functionen U_1 und V_1 Ausdrücke von folgender Art:

$$(20.)\quad \begin{cases} U_1 = P - z\,\dfrac{dH}{dx} \\ V_1 = Q - z\,\dfrac{dH}{dy} \end{cases}$$

wo P und Q unbekannte Functionen von x, y bedeuten. Diese Ausdrücke genügen auch, wie man leicht erkennt, den Gleichungen (17.) und (19.).

In den vorstehenden Rechnungen sind alle Gleichungen der Systeme (14.), (15.) gebraucht worden, mit Ausnahme der 4. Gleichung (14.) Dieselbe liefert eine Bestimmung für W_1, wenn man für U_1 und V_1 die in (20.) ermittelten Werthe einsetzt, wodurch die besagte Gleichung die Form erhält:

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{a-2b}{a}\left(\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2H}{dy^2}\right) z - \frac{a-2b}{a}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right).$$

Integrirt man, so kommt:

$$(21.)\quad \left\{ W_1 = \frac{a-2b}{a}\left(\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2H}{dy^2}\right)\frac{z^2}{2} - \frac{a-2b}{a}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right) z + H_1 \right.$$

wo H_1 eine unbekannte Function von x, y bedeutet. Hiermit sind sämmtliche Glieder negativer Grössenordnung von ξ, η, ζ und ausserdem der Term oter Ordnung von ζ auf unbekannte Functionen von x y zurückgeführt worden. Werden dieselben zusammengefasst, so erhält man das Gleichungssystem:

$$(22.)\quad \begin{cases} U + U_1 = P - z\,\dfrac{dH}{dx} \\ V + V_1 = Q - z\,\dfrac{dH}{dy} \\ W + W_1 = H + \dfrac{a-2b}{a}\left(\dfrac{d^2H}{dx^2} + \dfrac{d^2H}{dy^2}\right)\dfrac{z^2}{2} \\ \quad - \dfrac{a-2b}{a}\left(\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy}\right) z + H_1 \end{cases}$$

Was nun die Ordnung der Functionen H, P, Q, H_1 anbelangt, so ist bereits gefunden, dass H nur Terme der -3ten und

[illegible] ergiebt
[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] werden mit
[illegible]

$$
(24.)\quad
\begin{cases}
\xi = P - z\dfrac{dH}{dx} + u \\[2mm]
\eta = Q - z\dfrac{dH}{dy} + v \\[2mm]
\zeta = H + \dfrac{a-2b}{a}\left(\dfrac{d^2H}{dx^2} + \dfrac{d^2H}{dy^2}\right)\dfrac{z^2}{2} \\[2mm]
\quad - \dfrac{a-2b}{a}\left(\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy}\right) z + H_1 + w.
\end{cases}
$$

Die Aufgabe besteht also jetzt darin, die unbekannten Funktionen H, P, Q, H_1 zu ermitteln und die Restglieder u, v, w mit genügender Annäherung zu berechnen.

---

§ III.

Discussion der erhaltenen Resultate.

Bevor an die am Ende des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe herangegangen wird, sollen die in den Gleichungen (23.) (24.) gefundenen ersten Annäherungen auf ihre mechanische Bedeutung untersucht werden. Wenn man die im Innern wirkenden elastischen Maximaldrucke $\sqrt{X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2}$ und $\sqrt{X_y^2 + Y_y^2 + Z_y^2}$ auf 2 Ordnungen genau berechnen will, so hat man nur nöthig, die beiden niedrigsten Ordnungen der Kräfte X_x, X_y, Y_y zu berücksichtigen und die anderen Kräfte Z_x, Z_y verschwinden zu lassen, denn die Terme der Ordnungen -4 und -3 in den Radicanden rühren nur von den negativen Ordnungen der Kräfte X_x, X_y, Y_y her. Man erhält also in erster Annäherung:

$$(25.)\begin{cases} X_x = \frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{dP}{dx} - z\frac{d^2H}{dx^2}\right) + \frac{2b}{a}(a-2b)\left(\frac{dQ}{dy} - z\frac{d^2H}{dy^2}\right) \\ Y_y = \frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{dQ}{dy} - z\frac{d^2H}{dy}\right) + \frac{2b}{a}(a-2b)\left(\frac{dP}{dx} - z\frac{d^2H}{dx^2}\right) \\ X_y = b\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} - 2z\frac{d^2H}{dxdy}\right) \\ X_z = Y_z = 0 \end{cases}$$

natürlich mit Ausnahme der Fälle, in denen sich X_x, X_y, Y_y auf eine höhere Ordnung als die 2te reduciren.

Nach dem Princip der Superposition, welches wegen der linearen Beschaffenheit der Functionen H, P, Q anwendbar ist, kann man sich die mechanische Bedeutung dieser Functionen erklären, wenn immer nur eine der drei Functionen als von Null verschieden angenommen wird. Es wird gezeigt werden, dass H eine Biegung, P und Q Ausdehnungen der Platte in Richtung der x- und y-Achse vorstellen. Nimmt man von jeder der 3 Verschiebungen ξ, η, ζ die zwei niedrigsten Grössenordnungen, so erhält man nach (24.) die Ausdrücke

$$(26.)\begin{cases} \xi = P - z\frac{dH}{dx} \\ \eta = Q - z\frac{dH}{dy} \\ \zeta = H \end{cases}$$

welche zeigen, dass die Ordnung von ζ im Allgemeinen um 1 niedriger ist als die von ξ und η. Es sei zunächst H von Null verschieden, dagegen $P = Q = 0$, dann erhält man

$$\xi = -z\frac{dH}{dx},\ \eta = -z\frac{dH}{dy},\ \zeta = H$$

Für die anfänglich in der xyEbene liegenden Theilchen ist $z = 0$, also sind auch ihre Verschiebungen $\xi = \eta = 0$. Es tritt nur eine Verschiebung in Richtung der z-Achse ein. Die Grösse derselben ist

$$\zeta = H$$

Diese Gleichung stellt eine Fläche dar und zwar diejenige, in welche die Mittelebene nach der Deformation übergegangen ist. Um über die Verschiebung der Theilchen, welche ausserhalb der Mittelebene liegen, einen Aufschluss zu erhalten, betrachte man diejenigen, welche im anfänglichen Zustande auf einer zur Mittelebene senkrechten Geraden lagen. Zu diesem Zweck hat man den Coordinaten x, y constante Werthe beizulegen und nur z variabel zu nehmen. Durch diese Festsetzung wird ζ constant, dagegen ξ und η variabel. Bezeichnet man die nach der Biegung eintretenden Coordinaten durch x' y' z', so dass $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, $z' = z + \zeta$ ist, so erhält man durch Substitution der Werthe von ξ, η, ζ

$$x' = x - z\frac{dH}{dx},\ y' = y - z\,\frac{dH}{dy},\ \ z' = z + H$$

Eliminirt man z mit Hülfe der 3. Gleichung, so erhält man:

$$x' - x + \frac{dH}{dx}\,(z' - H) = 0\ ;\ y' - y + \frac{dH}{dy}\,(z' - H) = 0.$$

Da x y und somit auch H, $\frac{dH}{dx}$, $\frac{dH}{dy}$ constant sind, so stellen die obigen Gleichungen eine gerade Linie dar. Es sind also die Theilchen der betrachteten Geraden auch nach der Deformation auf einer Geraden geblieben. Von dieser Geraden lässt sich noch eine interessante Eigenschaft angeben. Ihre Form zeigt, dass sie eine Normale zur Fläche $\zeta = H$ ist.

Beachtet man, dass der Krümmungsradius der Curve, die durch den Schnitt einer zur x zEbene parallelen Ebene mit der Fläche $\zeta = H$ entsteht, gleich $\dfrac{\frac{d^2H}{dx^2}}{\left(1+\left[\frac{dH}{dx}\right]^2\right)^{3/2}}$ ist, welcher Ausdruck sich auf $\frac{d^2H}{dx^2}$ reducirt, da $\left(\frac{dH}{dx}\right)^2$ gegen

die Einheit zu vernachlässigen ist und ebenso, dass der Krümmungsradius der Schnittcurve einer zur yzEbene parallelen Ebene aus demselben Grunde gleich $\frac{d^2H}{dy^2}$ ist, so sieht man, dass, wenn die Krümmungsradien mit ϱ_1 resp. ϱ_2 bezeichnet werden, die Kräfte X_x, Y_y sich schreiben lassen.

$$X_x = -z\left(\frac{4b}{a}(a-b)\,\varrho_1 + \frac{2b}{a}(a-2b)\,\varrho_2\right)$$
$$Y_y = -z\left(\frac{4b}{a}(a-b)\,\varrho_2 + \frac{2b}{a}(a-2b)\,\varrho_1\right)$$

Diese letzten Gleichungen sind hauptsächlich deswegen hingeschrieben, weil sie die Analogie der eben in Betreff der Function H erhaltenen Resultate mit den von der Function $\mathfrak{F}$ in dem Werke des Herrn Prof. Pochhammer angegebenen Eigenschaften, die unverkennbar ist und deshalb nicht besonders angegeben zu werden braucht, noch mehr hervortreten lassen.

Es soll jetzt die Annahme gemacht werden, dass P von Null verschieden, dagen $H = Q = o$ sei; demnach ergiebt sich:

$$\xi = P, \quad \eta = o, \quad \zeta = o.$$

Alle Theilchen, die auf einer zur x-Achse parallelen Geraden liegen, bleiben also auf derselben. Die Platte wird mithin nur in Richtung der x-Achse ausgezogen resp. zusammengezogen. Zugleich erkennt man, dass dieser Auszug für alle Punkte, die dasselbe x und y haben, gleich gross ist d. h. eine zur xyEbene senkrechte Gerade wird nur parallel mit sich selbst in Richtung der x-Achse verschoben. Nimmt man also eine Ebene senkrecht zur x-Achse, so wird dieselbe nach der Deformation in eine Cylinderfläche übergehen, deren Gleichung

$$x' = x + P(x, y')$$

ist, wie man leicht sieht. Hier bedeuten x′ y′ die Coordinaten der Cylinderfläche, in welche die Ebene $x = \text{const.}$ übergegangen ist. In derselben Weise erkennt man, dass wenn Q von Null verschieden und $H = P = o$ ist, hierdurch ein Auszug der Platte in Richtung der y-Achse dargestellt wird, indem sämmtliche Punkte eine der y-Achse parallele Bewegung ausführen. Eine Ebene $y = \text{const.}$ geht in eine Cylinderfläche

$$y' = y + Q(x', y)$$

über, die der entsprechenden Gleichung für den Auszug in der x-Achse analog ist.

Betrachtet man die beiden ersten Gleichungen (23.), so sieht man, dass in den angenäherten Werthen X_x und Y_y, die in (25.) angegeben sind, nicht nur die Ausdrücke (26.), sondern auch das Glied W_1 der Verschiebung ζ enthalten ist. Aus den Gleichungen (26) würden für X_x und Y_y die Werthe

$$X_x = a\left(\frac{dP}{dx} - z\,\frac{d^2H}{dx^2}\right) + (a-2b)\left(\frac{dQ}{dy} - z\,\frac{d^2H}{dy^2}\right)$$

$$Y_y = a\left(\frac{dQ}{dy} - z\,\frac{d^2H}{dy^2}\right) + (a-2b)\left(\frac{dP}{dx} - z\,\frac{d^2H}{dx^2}\right)$$

folgen, die sich von (25.) durch die Werthe der Constanten unterscheiden und weniger genau sind. Der Beitrag, den W_1 zu den Werthen X_x und Y_y in (25.) liefert, rührt von dem Gliede

$$\frac{a-2b}{a}\left(\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2H}{dy^2}\right)\frac{z^2}{2} - \frac{a-2b}{a}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)z$$

her, welches die Contraction (im positiv. wie im negativ. Sinne) in Richtung der z-Achse darstellt, die zu der Biegung sowie zu der Ausdehnung der Platte stets hinzutritt. Dieser Ausdruck muss zu dem Werthe ζ in (26.) hinzugefügt werden, damit die Kraft Z_z gleich Null wird, wenn man die Restglieder u, v, w vernachlässigt. Denkt man

sich die Platte in eine Schaar von Fasern, die der z-Achse parallel gehen, zerlegt, so darf nach der angegebenen Näherungsrechnung, welche die Terme u, v, w, ausschliesst, nur eine seitliche elastische Wechselwirkung zwischen den einzelnen Fasern, welche parallel der xyEbene gerichtet ist, statthaben, indem alle elastischen Kräfte, die eine Componente in Richtung der z-Achse liefern würden, dieselbe nach dem Vorigen nicht besitzen können. Dieses Verschwinden der z-Componenten setzt Clebsch bekanntlich im § 39 seines Lehrbuches voraus, wo er das Gleichgewicht einer elastischen Platte von endlicher Dicke behandelt,

---

§ IV.

Die Terme höherer Ordnung der Verschiebungen ξ, η, ζ und Aufstellung der Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen von (x y).

Was zunächst die Verschiebungen ξ, η anbetrifft, so sind die Glieder negativer Grössenordnung in § II ermittelt. Zur Berechnung der Glieder höherer Ordnung hat man auf die beiden ersten Gleichungen (1.)

$$\frac{dX_x}{dx} + \frac{dY_x}{dy} + \frac{dZ_x}{dz} = 0$$
$$\frac{dX_y}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dZ_y}{dz} = 0$$

zurückzugehen. Man trenne von den Gliedern u und v die Terme $u_{0,1}$, $v_{0,1}$ und bezeichne den Rest durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, ndem man mit $u_{0,1}$, $v_{0,1}$ die Glieder 0ter und 1ter Ordnung

bezeichnet. Darauf substituire man die Werthe (23.) in die obigen Gleichungen, wodurch man erhält:

$$\frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{d^2P}{dx^2} - z\frac{d^3H}{dx^3}\right) + \frac{2b}{a}(a-2b)\left(\frac{d^2Q}{dx\,dy} - z\frac{d^3H}{dxdy^2}\right) +$$
$$a\frac{d^2u_{0,1}}{dx^2} + (a-2b)\left(\frac{d^2v_{0,1}}{dx\,dy} + \frac{d^2w}{dx\,dz}\right) + a\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx^2} + (a-2b)\frac{d^2\mathfrak{V}}{dx\,dy} +$$
$$b\left(\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dx\,dy} - 2z\frac{d^3H}{dx\,dy^2} + \frac{d^2u_{0,1}}{dy^2} + \frac{d^2v_{0,1}}{dx\,dy}\right) + b\left(\frac{d^2\mathfrak{U}}{dy^2} +\right.$$
$$\left.\frac{d^2\mathfrak{V}}{dxdy}\right) + \frac{b(a-2b}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^3H}{dx\,dy^2}\right)z - \frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx\,dy}\right) +$$
$$b\frac{d^2u_{0,1}}{dz^2} + b\frac{d^2\mathfrak{U}}{dz^2} + b\frac{d^2w}{dx\,dz} = 0$$

$$b\left(\frac{d^2P}{dxdy} + \frac{d^2Q}{dx^2} - 2z\frac{d^3H}{dx^2dy} + \frac{d^2u_{0,1}}{dx\,dy} + \frac{d^2v_{0,1}}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2\mathfrak{U}}{dxdy} + \frac{d^2\mathfrak{V}}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{d^2Q}{dy^2} - z\frac{d^3H}{dy^3}\right) + \frac{2b}{a}(a-2b)\left(\frac{d^2P}{dx\,dy} - z\frac{d^3H}{dx^2dy}\right) +$$
$$a\frac{d^2v_{0,1}}{dy^2} + (a-2b)\left(\frac{d^2u_{0,1}}{dx\,dy} - \frac{d^2w}{dy\,dz}\right) + a\frac{d^2\mathfrak{V}}{dy^2} + (a-2b)\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx\,dy}$$
$$+ \frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^2dy} + \frac{d^3H}{dy^3}\right)z - \frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^2P}{dxdy} + \frac{d^2Q}{dy^2}\right) + b\frac{d^2v_{0,1}}{dz^2}$$
$$+ b\frac{d^2\mathfrak{V}}{dz^2} + b\frac{d^2w}{dy\,dz} = 0.$$

Zieht man den Satz zur Hülfe, dass in einer Gleichung, deren rechte Seite Null ist, die Summe der Terme gleicher Grössenordnung für sich verschwinden muss, so erhält man durch Absonderung der -2ten und -1ten Ordnung die Gleichungen:

$$(27.)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2u_{0,1}}{dz^2} = \dfrac{3a-2b}{a}\left(\dfrac{d^3H}{dx^3} + \dfrac{d^3H}{dx\,dy^2}\right)z - \dfrac{3a-2b}{a}\dfrac{d^2P}{dx^2} - \dfrac{d^2P}{dy^2} \\ \quad - \dfrac{2(a-b)}{a}\dfrac{d^2Q}{dxdy} \\ \dfrac{d^2v_{0,1}}{dz^2} = \dfrac{3a-2b}{a}\left(\dfrac{d^3H}{dx^2dy} + \dfrac{d^3H}{dy^3}\right)z - \dfrac{3a-2b}{a}\dfrac{d^2Q}{dy^2} - \dfrac{d^2Q}{dx^2} \\ \quad - \dfrac{2(a-b)}{a}\dfrac{d^2P}{dxdy}.\end{cases}$$

Die übrigen Glieder, welche die höheren Ordnungen umfassen, setzen sich zu den Gleichungen:

$$
(28.)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a\frac{d^2 u_{0,1}}{dx^2} + (a-b)\left(\frac{d^2 v_{0,1}}{dx\,dy} + \frac{d^2 w}{dx\,dz}\right) + a\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx^2} + (a-b)\frac{d^2\mathfrak{V}}{dx\,dy} \\
& + b\frac{d^2 u_{0,1}}{dy^2} + b\frac{d^2\mathfrak{U}}{dy^2} + b\frac{d^2\mathfrak{U}}{dz^2} = 0. \\
& a\frac{d^2 v_{0,1}}{dy^2} + (a-b)\left(\frac{d^2 w}{dy\,dz} + \frac{d^2 u_{0,1}}{dx\,dy}\right) + a\frac{d^2\mathfrak{V}}{dy^2} + (a-b)\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx\,dy} \\
& + b\frac{d^2 v_{0,1}}{dx^2} + b\frac{d^2\mathfrak{V}}{dx^2} + b\frac{d^2\mathfrak{V}}{dz^2} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

zusammen. Die Gleichungen (27.) lassen sich sofort integriren und geben:

$$
(29.)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u_{0,1} = \frac{3a-2b}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^3H}{dx\,dy^2}\right)\frac{z^3}{6} - \frac{3a-2b}{a}\frac{z^2}{2}\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2P}{dy^2} \\
& - \frac{a-b}{a}z^2\frac{d^2Q}{dx\,dy} + z\,L_1 + P_1;\; v_{0,1} = \frac{3a-2b}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^2dy} + \frac{d^3H}{dy^3}\right)\frac{z^3}{6} \\
& - \frac{3a-2b}{a}\frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dy^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{a-b}{a}z^2\frac{d^2P}{dx\,dy} + z\,M_1 + Q_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Hier bedeuten L_1, P_1, M_1, Q_1 unbekannte Functionen von x, y, von denen L_1, M_1 aus Gliedern -1ter und 0ter Ordnung, P_1, Q_1 dagegen aus Gliedern 0ter und -1ter Ordnung zusammengesetzt sind. Die Werthe von $u_{0,1}$ und $v_{0,1}$ geben jezt das Mittel, die Glieder 0ter und -1ter Ordnung der Kräfte X_z und Y_z vollständig anzugeben. Dieselben sind, wenn man auf die Formeln (23) zurückgeht:

$$
\begin{aligned}
X_{z(-1,0)} = {} & \frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^3H}{dx\,dy^2}\right)\frac{z^2}{2} + b\frac{dH_1}{dx} - \frac{4b}{a}(a-b)\,z\frac{d^2P}{dx^2} \\
& - b\,z\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{b}{a}(3a-4b)\,z\frac{d^2Q}{dx\,dy} + b\,L_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{z(-1,0)} = {} & \frac{4b}{a}(a-b)\left(\frac{d^3H}{dx^2dy} + \frac{d^3H}{dy^3}\right)\frac{z^2}{2} + b\frac{dH_1}{dy} - \frac{4b}{a}(a-b)\,z\frac{d^2Q}{dy^2} \\
& - b\,z\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{b}{a}(3a-4b)\,z\frac{d^2P}{dx\,dy} + b\,M_1.
\end{aligned}
$$

Nach den Gleichungen (4) sollen diese Kräfte in den Ebenen $z = \pm c$ die Werthe $\pm X$ und $\pm Y$ annehmen.

Setzt man also in die letzten Ausdrücke $z = \pm c$, so erhält man 4 Gleichungen, aus denen sich 4 Funktionen bestimmen lassen. Durch Subtraction der so gewonnenen Gleichungen entstehen, indem sich die mit geraden Potenzen von c behafteten Glieder fortheben, die Differentialgleichungen:

$$(30.) \quad \begin{cases} \frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2P}{dx^2} + b\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2Q}{dxdy} = -\frac{X(c)+X(-c)}{2c} \\ \frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2Q}{dy^2} + b\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2P}{dxdy} = -\frac{Y(c)+Y(-c)}{2c} \end{cases}$$

Zur Bestimmung der durch die Integration dieser Gleichungen auftretenden willkürlichen Constanten müssen Nebenbedingungen abgeleitet werden. Letztere sollen jedoch erst im § V behandelt werden, ebenso die Nebenbedingungen für alle ferneren Differentialgleichungen.

Werden die obigen Werthe der Kräfte $X_{z\,(-1,0)}$, $Y_{z\,(-1,0)}$ in den Ebenen $z = \pm c$ paarweise addirt, wobei sich die mit ungeraden Potenzen von c versehenen Glieder aufheben, so ergeben sich für L_1, M_1 Ausdrücke folgender Art:

$$(31.) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{2(b-a)c^2}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^3H}{dx\,dy^2}\right) - \frac{dH_1}{dx} + \frac{X(c)-X(-c)}{2b} \\ M_1 = \frac{2(b-a)c^2}{a}\left(\frac{d^3H}{dx^2\,dy} + \frac{d^3H}{dy^3}\right) - \frac{dH_1}{dy} + \frac{Y(c)-Y(-c)}{2b} \end{cases}$$

Die Werthe L_1, M_1 sind also keine selbstständigen Functionen, da sie sich vollständig durch H und H_1 ausdrücken lassen.

Es ist nicht unwichtig zu bemerken, dass die Gleichungen (30) sich auf die Form:

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} = \text{bekannter Function } (x, y)$$

bringen lassen.. Wenn man zur Abkürzung:

$$\varphi = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}$$

$$\psi = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}$$

setzt, so erhält man aus (30.) für φ und ψ die Gleichungen:

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\psi}{dy}=-\frac{X(c)+X(-c)}{2c}$$

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d\varphi}{dy}-b\frac{d\psi}{dx}=-\frac{Y(c)+Y(-c)}{2c}.$$

Differentiirt man die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, und addirt beide, so ergiebt sich für φ die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=-\frac{\frac{d[X(c)+X(-c)]}{dx}+\frac{d[Y(c)+Y(-c)]}{dy}}{\frac{8bc}{a}(a-b)}.$$

Differentiirt man dagegen die erste Gleichung nach y, die zweite nach x und subtrahirt die zweite von der ersten, so kommt für ψ die Gleichung:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}=\frac{\frac{d[Y(c)+Y(-c)]}{dx}-\frac{d[X(c)+X(-c)]}{dy}}{2bc}.$$

Man hat somit für φ und ψ die gewünschte Gleichungsform erhalten. Integrirt man, so folgen für φ und ψ die Ausdrücke:

$$\varphi=f_1(x,y)\ ;\quad \psi=f_2(x,y)$$

wo f_1 und f_2, abgesehen von willkührlichen Integrationsgrössen, die durch Nebenbedingungen bestimmt werden müssen, bekannte Functionen von x, y sind. Mit Benutzung der obigen Werthe von φ und ψ ergeben sich hieraus für P und Q die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{df_1}{dx}+\frac{df_2}{dy}\\[2mm]\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}=\frac{df_1}{dy}-\frac{df_2}{dx}\end{array}\right. .$$

welche in der That die obengenannte Form haben.

Zur Berechnung der Glieder 1ter und 2ter Ordnung von ζ hat man die 3. Gleichung (1) zu benutzen. Man be-

zeichne mit $w_{1,2}$ die Terme 1ter und 2ter Ordnung und mit $\mathfrak{W}$ den Rest von ζ, dann erhält man durch Substitution der Werthe (23):

$$\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^4H}{dx^4}+\frac{d^4H}{dx^2dy^2}\right)\frac{z^2}{2}-b\frac{(a-2b)}{a}\left(\frac{d^3P}{dx^3}+\frac{d^3Q}{dx^2dy}\right)z+b\frac{d^2H_1}{dx^2}$$
$$+b\frac{d^2w_{1,2}}{dx^2}+b\frac{d^2\mathfrak{W}}{dx^2}+b\frac{d^2u_{0,1}}{dx\,dz}+b\frac{d^2\mathfrak{U}}{dxdz}+\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^4H}{dx^2dy^2}+\right.$$
$$\left.\frac{d^4H}{dy^4}\right)\frac{z^2}{2}-\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^3P}{dxdy^2}+\frac{d^3Q}{dy^3}\right)z+b\frac{d^2H_1}{dy^2}+b\frac{d^2w_{1,2}}{dy^2}+b\frac{d^2\mathfrak{W}}{dy^2}$$
$$+b\frac{d^2v_{0,1}}{dy\,dz}+b\frac{d^2\mathfrak{V}}{dy\,dz}+(a-b)\left(\frac{d^2u_{0,1}}{dx\,dz}+\frac{d^2v_{0,1}}{dy\,dz}\right)+(a-2b)\left(\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx\,dz}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2\mathfrak{V}}{dy\,dz}\right)+a\frac{d^2w_{1,2}}{dz^2}+a\frac{d^2\mathfrak{W}}{dz^2}-D\Gamma=0.$$

Nimmt man die Glieder — 1ter und 0ter Ordnung heraus und setzt ihre Summe gleich Null, so entsteht bei passender Anordnung die Gleichung:

$$a\frac{d^2w_{1,2}}{dz^2}=\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^3P}{dx^3}+\frac{d^3P}{dxdy^2}+\frac{d^3Q}{dx^2dy}+\frac{d^3Q}{dy^3}\right)z-\frac{b(a-2b)}{a}$$
$$\left(\frac{d^4H}{dx^4}+2\frac{d^4H}{dx^2dy^2}+\frac{d^4H}{dy^4}\right)\frac{z^2}{2}-b\left(\frac{d^2H_1}{dx^2}+\frac{d^2H_1}{dy^2}\right)-(a-b)\left(\frac{d^2u_{0,1}}{dx\,dz}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2v_{0,1}}{dy\,dz}\right)+D\Gamma.$$

Zwischen den übrig bleibenden Gliedern gilt die Beziehung:

$$(32.)\quad\left\{\begin{aligned}&(a-b)\left(\frac{d^2\mathfrak{U}}{dx\,dz}+\frac{d^2\mathfrak{V}}{dy\,dz}\right)+b\left(\frac{d^2w_{1,2}}{dx^2}+\frac{d^2w_{1,2}}{dy^2}\right)+\\&b\left(\frac{d^2\mathfrak{W}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{W}}{dy^2}\right)+a\frac{d^2\mathfrak{W}}{dz^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Das Integral der ersten Gleichung ist sofort auszuführen und giebt:

$$(33.)\quad\left\{\begin{aligned}&a\,w_{1,2}=\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^3P}{dx^3}+\frac{d^3P}{dxdy^2}+\frac{d^3Q}{dx^2dy}+\frac{d^3Q}{dy^3}\right)\frac{z^3}{6}-\\&\frac{b(a-2b)}{a}\left(\frac{d^4H}{dx^4}+2\frac{d^4H}{dx^2dy^2}+\frac{d^4H}{dy^4}\right)\frac{z^4}{24}-b\left(\frac{d^2H_1}{dx^2}+\frac{d^2H_1}{dy_2}\right)\\&\frac{z^2}{2}-(a-b)\int\left(\frac{d\,u_{0,1}}{dx}+\frac{d\,v_{0,1}}{dy}\right)dz+D\Gamma\frac{z^2}{2}+z\,N_1+H_2.\end{aligned}\right.$$

Die Grössen X_2 und H_2 sind unbekannte durch die Integration hinzugetretene Functionen von x, y. Die Ordnung derselben ergiebt sich mit Leichtigkeit aus der letzten Gleichung. Ferner hat man nach ([illegible]) in (33) zu setzen:

$$(34)\begin{cases}\int\left(\frac{dL_{1}}{dx}-\frac{dM_{1}}{dy}\right)dz=\frac{3a-2b}{a}\left(\frac{d^4H}{dx^4}-2\frac{d^4H}{dx^2dy^2}-\frac{d^4H}{dy^4}\right)\\ \frac{z^4}{24}-\frac{3a-2b}{a}\left(\frac{d^3P}{dx^3}-\frac{d^3P}{dxdy^2}-\frac{d^3Q}{dx^2dy}-\frac{d^3Q}{dy^3}\right)\frac{z^3}{6}-\left(\frac{dL_1}{dx}+\right.\\ \left.\frac{dM_1}{dy}\right)\frac{z^2}{2}-\left(\frac{dP_1}{dx}-\frac{dQ_1}{dy}\right)z\end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen ([illegible]) und (33) lassen sich jetzt die Glieder [illegible] und [illegible] Ordnung der Kraft Z_z darstellen. Man hat nämlich:

$$Z_{z,n} = (a-2b)\left(\frac{dL_{1,n}}{dx}-\frac{dM_{1,n}}{dy}\right)-a\frac{dN_{1,n}}{dz}.$$

Setzt man die bezüglichen Werthe ein, so hat man nach geeigneter Zusammenziehung:

$$Z_{z,n} = \frac{2b(a-b)}{a}z^2\left(\frac{d^3P}{dx^3}-\frac{d^3P}{dxdy^2}-\frac{d^3Q}{dx^2dy}-\frac{d^3Q}{dy^3}\right)-\frac{2b(a-b)}{3a}z^3$$
$$\left(\frac{d^4H}{dx^4}-2\frac{d^4H}{dx^2dy^2}-\frac{d^4H}{dy^4}\right)-bz\left(\frac{d^2H_1}{dx^2}-\frac{d^2H_1}{dy^2}\right)-bz\left(\frac{dL_1}{dx}-\frac{dM_1}{dy}\right)$$
$$+D\Gamma(a-b)\left(\frac{dP_1}{dx}+\frac{dQ_1}{dy}\right)-X_2$$

Durch Einführung der bekannten Abkürzungszeichen $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dy^2}$ und Substitution der Werthe von L_1, M_1 aus (31) folgt:

$$Z_{z,n} = \frac{2b(a-b)}{a}z^2\left(\frac{d}{dx}\Delta P-\frac{d}{dy}\Delta Q\right)-\frac{2b(a-b)}{3a}z^3\Delta\Delta H-$$
$$\frac{2b(b-a)}{a}c^2z\Delta\Delta H-\frac{z}{2}\left(\frac{d}{dx}(X_{+c}-X_{-c})+\frac{d}{dy}(Y_{+c}-Y_{-c})\right)+$$
$$D\Gamma(a-b)\left(\frac{dP_1}{dx}-\frac{dQ_1}{dy}\right)-X_2$$

Dieser Werth soll in den Ebenen $z=\pm c$ die Werthe $\pm Z$ annehmen. Subtrahirt man die so entstehenden Glei-

chungen, so erlangt man eine Differentialgleichuug zur Bestimmung von H, weil sich die Function H_1 aus dem Ausdruck von $Z_{z(0,1)}$ ganz fortgehoben hat. Dieselbe lautet:

$$(35.)\quad \Delta\Delta H = \frac{3a}{8b(a-b)c^3}\Big[Z(c)+Z(-c)-2cD\Gamma+c\Big(\frac{d}{dx}(X(c)-X(-c))+\frac{d}{dy}(Y(c)-Y(-c))\Big)\Big].$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so findet man den Werth von N_1 ausgedrückt durch P, Q, P_1, Q_1, nämlich:

$$(36.)\quad N_1 = \frac{2bc^2(b-a)}{a}\Big(\frac{d}{dx}\Delta P+\frac{d}{dy}\Delta Q\Big)+b\Big(\frac{dP_1}{dx}+\frac{dQ_1}{dy}\Big)+\frac{Z(c)-Z(-c)}{2}.$$

In dem Vorigen sind die Verschiebungen ξ, η bis auf die Ordnung 1 und ζ bis auf die Ordnung 2 berechnet, jedoch sind in diesen Ausdrücken noch die unbekannten Functionen H_1, P_1, Q_1, H_2 enthalten. Um auch für diese Differentialgleichungen herzustellen, ist es nöthig, noch höhere Ordnungen der Verschiebungen ξ, η, ζ zu berechnen. Dies geschieht durch Abtrennung der 2 nächsten Ordnungen aus den Gleichungen (28.) und (33.), wodurch Gleichungen von der Form:

$$(37.)\quad \begin{cases} b\,\dfrac{d^2u_{2,3}}{dz^2} = -a\,\dfrac{d^2u_{0,1}}{dx^2} - b\,\dfrac{d^2u_{0,1}}{dy^2} - (a-b)\Big(\dfrac{d^2v_{0,1}}{dx\,dy} + \dfrac{d^2w_{1,2}}{dx\,dz}\Big) \\[2ex] b\,\dfrac{d^2v_{2,3}}{dz^2} = -a\,\dfrac{d^2v_{0,1}}{dy^2} - b\,\dfrac{d^2v_{0,1}}{dx^2} - (a-b)\Big(\dfrac{d^2u_{0,1}}{dx\,dy} + \dfrac{d^2(w_{1,2})}{dy\,dz}\Big) \end{cases}$$

$$(38.)\quad a\,\frac{d^2w_{3,4}}{dz^2} = -b\Big(\frac{d^2w_{1,2}}{dx^2}+\frac{d^2w_{1,2}}{dy^2}\Big) - (a-b)\Big(\frac{d^2u_{2,3}}{dx\,dz}+\frac{d^2v_{2,3}}{dy\,dz}\Big)$$

entstehen, in welchen die Indices die Ordnung des betreffenden Gliedes angeben.

Hat man zunächst $u_{1,2}$ und $v_{1,2}$ aus (3) berechnet, so geben dieselben in (3) substituirt den Werth von $w_{1,4}$. Durch die Integrationen kommen allerdings in jede der Gleichungen 2 unbekannte Functionen von x, y hinein. Dieselben sind aber durch Betrachtung der Glieder höherer Ordnungen der Kräfte X_1, Y_1, Z_1 zu bestimmen. Die Reste der Gleichungen (2) und (3) werden benutzt, um in ähnlicher Weise die 2 nächst höheren Ordnungen von ξ, η, ζ zu bestimmen. Man sieht leicht, dass dieses Verfahren beliebig weit fortgesetzt werden kann, so dass schliesslich eine Entwicklung von ξ, η, ζ nach z erhalten wird, in der die Coefficienten unbekannte Functionen von x, y sind. In der That ist im § 1 die Annahme gemacht, dass es gestattet sei, eine solche Entwicklung vorzunehmen. Die unbekannten Functionen von x, y werden theils durch Differentialgleichungen definirt, theils werden sie auf vorhergehende Functionen zurückgeführt, indem man die Werthe je zweier aufeinanderfolgenden Ordnungen der Kräfte X_1, Y_1, Z_1 in den Ebenen $z = \pm$ paarweise subtrahirt oder addirt.

In allen Anwendungen der Theorie wird es jedoch nur nöthig sein, die Verschiebungen ξ, η, ζ bis auf die Ordnung 2 zu berechnen, da in diesem Falle die inneren Druckkräfte bis auf die 2te Ordnung berücksichtigt sind. Es genügen daher die gefundenen Werthe von $u_{1,2}$, $v_{1,2}$, $w_{1,2}$ und die Glieder höherer Ordnungen sollen nur insoweit ermittelt werden, wie sie in den verschiedenen Ordnungen der Kräfte X_1, Y_1, Z_1 vorkommen, um für die noch übrigen unbekannten Functionen H_2, F_1, Q_1 Differentialgleichungen ableiten zu können. Die Function H_2 ist bei dieser Annäherung nicht mehr in Betracht zu ziehen, da sie in $w_{1,2}$

nicht mit z multiplicirt vorkommt und nur Grössen 1ter und 2ter Ordnung umfasst.

Es sollen zunächst die Summanden 1ter und 2ter Ordnung der Kräfte X_z und Y_z ermittelt werden. Dieselben sind:

$$X_{z(1,2)} = b \frac{d w_{1,2}}{dx} + b \frac{d u_{2,3}}{dz}$$

$$Y_{z(1,2)} = b \frac{d w_{1,2}}{dy} + b \frac{d v_{2,3}}{dz}.$$

Setzt man hierin für $\frac{du_{2,3}}{dz}$ und $\frac{dv_{2,3}}{dz}$ ihre Werthe aus (37.), so kommt:

$$X_{z(1,2)} = (2b - a) \frac{d w_{1,2}}{dx} - a \int \frac{d^2 u_{0,1}}{dx^2} dz - b \int \frac{d^2 u_{0,1}}{dy^2} dz - (a-b) \int \frac{d^2 v_{0,1}}{dx\, dy} dz + L_2$$

$$Y_{z(1,2)} = (2b - a) \frac{d w_{1,2}}{dy} - a \int \frac{d^2 v_{0,1}}{dy^2} dz - b \int \frac{d^2 v_{0,1}}{dx^2} dz - (a-b) \int \frac{d^2 u_{0,1}}{dx\, dy} dz + M_2.$$

Hier bedeuten L_2 und M_2 unbekannte Functionen von x, y, welche durch die einmalige Integration hinzutreten. Nach (33.) hat man:

$$(2b-a) \frac{d w_{1,2}}{dx} = \frac{2b-a}{a} \left[\frac{b(a-2b)}{6a} z^3 \left(\frac{d^2}{dx^2} \Delta P + \frac{d^2}{dxdy} \Delta Q \right) - \frac{b(a-2b)}{24a} z^4 \frac{d}{dx} \Delta\Delta H - \frac{bz^2}{2} \frac{d}{dx} \Delta H_1 + z \frac{dN_1}{dx} + \frac{dH_2}{dx} \right] - (a-b) \int \left(\frac{d^2 u_{0,1}}{dx^2} + \frac{d^2 (v_{0,1})}{dx\, dy} \right) dz.$$

Substituirt man diesen Werth, so wird:

$$X_{z,(1,2)} = \frac{2b-a}{a} \left[\frac{b(a-2b)}{6a} z^3 \left(\frac{d^2}{dx^2} \Delta P + \frac{d^2}{dxdy} \Delta Q \right) - \frac{b(a-2b)}{24a} z^4 \frac{d}{dx} \Delta\Delta H - \frac{bz^2}{2} \frac{d}{dx} \Delta H_1 + z \frac{dN_1}{dx} + \frac{dH_2}{dx} \right] + \frac{b}{a} (2b-3a) \int \frac{d^2 u_{0,1}}{dx^2} dz - b \int \frac{d^2 u_{0,1}}{dy^2} dz + \frac{2b}{a} (b-a) \int \frac{d^2 v_{0,1}}{dx\, dy} dz + L_2.$$

Die Summe der 3 Integralausdrücke ist aber:

$$\frac{b}{a}(2b-3a)\left(\frac{3a-2b}{24a}z^4\frac{d^3}{dx^3}\Delta H-\frac{3a-2b}{6a}z^3\frac{d^4P}{dx^4}-\frac{z^3}{6}\frac{d^4P}{dx^2dy^2}-\frac{a-b}{3a}z^3\frac{d^4Q}{dx^3dy}+\frac{z^2}{2}\frac{d^2L_1}{dx^2}+z\frac{d^2P_1}{dx^2}\right)-b\left(\frac{3a-2b}{24a}z^4\frac{d^3}{dxdy^2}\Delta H-\frac{3a-2b}{6a}z^3\frac{d^4P}{dx^2dy^2}-\frac{z^3}{6}\frac{d^4P}{dy^4}-\frac{a-b}{3a}z^3\frac{d^4Q}{dxdy^3}+\frac{z^2}{2}\frac{d^2L_1}{dy^2}+z\frac{d^2P_1}{dy^2}\right)+\frac{2b}{a}(b-a)\left(\frac{3a-2b}{24a}z^4\frac{d^3}{dxdy^2}\Delta H-\frac{3a-2b}{6a}z^3\frac{d^4Q}{dx^3dy}-\frac{z^3}{6}\frac{d^4Q}{dx^3dy}-\frac{a-b}{3a}z^3\frac{d^4P}{dx^2dy^2}+\frac{z^2}{2}\frac{d^2M_1}{dxdy}+z\frac{d^2Q_1}{dxdy}\right).$$

Denkt man sich diesen Werth oben eingesetzt, so hat man den ganzen Ausdruck von $X_{z,(1,2)}$. Derselbe muss nach (4.) für $z=\pm c$ den Werth Null annehmen, weil X nur die Ordnung o hat. Zieht man beide so entstehenden Gleichungen von einander ab, wobei man zu beachten hat, dass sich die mit geraden Potenzen von c behafteten Glieder fortheben, so entsteht die Gleichung:

$$-\frac{(2b-a)^2}{6a^2}bc^3\left(\frac{d^2}{dx^2}\Delta P+\frac{d^2}{dxdy}\Delta Q\right)+\frac{2b-a}{a}c\frac{dN_1}{dx}-\frac{b}{a}(2b-3a)c^3\left(\frac{3a-2b}{6a}\frac{d^4P}{dx^4}+\frac{1}{6}\frac{d^4P}{dy^2dx^2}+\frac{a-b}{3a}\frac{d^4Q}{dx^3dy}\right)+\frac{b}{a}(2b-3a)c\frac{d^2P_1}{dx^2}+c^3b\left(\frac{3a-2b}{6a}\frac{d^4P}{dx^2dy^2}+\frac{1}{6}\frac{d^4P}{dy^4}+\frac{a-b}{3a}\frac{d^4Q}{dxdy^3}\right)-bc\frac{d^2P_1}{dy^2}-\frac{2b}{a}(b-a)c^3\left(\frac{3a-2b}{6a}\frac{d^4Q}{dxdy^3}+\frac{1}{6}\frac{d^4Q}{dx^3dy}+\frac{a-b}{3a}\frac{d^4P}{dx^2dy^2}\right)+\frac{2b}{a}(b-a)c\frac{d^2Q_1}{dxdy}=0.$$

Wenn man hierin nach (36.)

$$\frac{2b-a}{a}c\frac{dN_1}{dx}=\frac{2bc^3}{a^2}(2b-a)(b-a)\left(\frac{d^2}{dx^2}\Delta P+\frac{d^2}{dxdy}\Delta Q\right)+\frac{b(2b-a)}{a}c\left(\frac{d^2P_1}{dx^2}+\frac{d^2Q_1}{dxdy}\right)+\frac{2b-a}{2a}c\frac{d}{dx}Z(c)-(Z(-c).)$$

setzt, so kommen ausser den unbekannten Functionen P_1 und Q_1 nur noch die als bekannt anzusehenden Functionen

P, Q und die äussere Druckkraft Z vor. Ordnet man die obige Gleichung, so erhält man:

$$\frac{4b(a-b)}{a}\frac{d^2 P_1}{dx^2}+b\frac{d^2P_1}{dy^2}+\frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2Q_1}{dxdy}=\frac{bc^2}{6a^2}(20a^2-44ab$$
$$+24b^2)\frac{d^4P}{dx^4}+\frac{bc^2}{6a^2}(21a^2-44ab+24b^2)\frac{d^4P}{dx^2dy^2}+\frac{bc^2}{6}\frac{d^4P}{dy^4}+\frac{bc^2}{6a^2}$$
$$(19a^2-44ab+24b^2)\frac{d^2}{dx\,dy}\varDelta Q+\frac{2b-a}{2a}\frac{d}{dx}(Z(c)-Z(-c))$$

oder:

$$(39.)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2P_1}{dx^2}+b\frac{d^2P_1}{dy^2}+\frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2Q_1}{dx\,dy}=\frac{2bc^2}{3a^2}(a-b)\\&(5a-6b)\left(\frac{d^2}{dx^2}\varDelta P+\frac{d^2}{dx\,dy}\varDelta Q\right)+\frac{bc^2}{6}\left(\frac{d^2}{dy^2}\varDelta P-\frac{d^2}{dxdy}\varDelta Q\right)\\&\qquad+\frac{2b-a}{2a}\frac{d}{dx}(Z(c)-Z(-c)).\end{aligned}\right.$$

Zur vollständigen Bestimmung von P_1 und Q_1 muss noch eine Differentialgleichung für dieselben abgeleitet werden. Dieselbe ergiebt sich aus dem Ausdruck der Glieder 1ter und 2ter Ordnung der Kraft Y_z:

$$(2b-a)\frac{d\,w_{1,2}}{dy}-a\int\frac{d^2\,v_{0,1}}{dy^2}dz-b\int\frac{d^2\,v_{0,1}}{dx^2}dz-(a-b)$$
$$\int\frac{d^2\,u_{0,1}}{dx\,dy}dz+M_2.$$

Man kann sich die Rechnung bedeutend erleichtern, wenn man bedenkt, dass $Y_{z,(1,2)}$ von $X_{z,(1,2)}$ sich nur dadurch unterscheidet, dass u an Stelle von v, x an Stelle von y, L_2 an Stelle von M_2 und umgekehrt getreten ist. Aehnliches gilt für die Ausdrücke $u_{0,1}$, $v_{0,1}$. Der eine kann aus dem anderen durch Vertauschung von x mit y, P mit Q, P_1 mit Q_1 und L_1 mit M_1 erhalten werden. Die gesuchte 2. Differentialgleichung für P_1, Q_1 wird also aus der ersten entstehen, wenn man die angegebenen Vertauschungen vornimmt. Man erhält so:

$$
(40.)\left\{\begin{array}{l}
\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2Q_1}{dx^2}+b\frac{d^2Q_1}{dx^2}+\frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2P_1}{dxdy}=\frac{2bc^2}{3a^2}(a-b) \\
(5a-6b)\left(\frac{d^2}{dy^2}\Delta Q+\frac{d^2}{dx\,dy}\Delta P\right)+\frac{bc^2}{6}\left(\frac{d^2}{dx^2}\Delta Q-\frac{d^2}{dx\,dy}\Delta P\right) \\
\qquad +\frac{2b-a}{2a}\frac{d}{dy}(Z_{(c)}-Z_{(-c)}).
\end{array}\right.
$$

Die Art der Verknüpfung der Functionen P_1, Q_1 in diesen Differentialgleichungen ist genau dieselbe wie die der Functionen P, Q in (32.). Addirt man endlich die Gleichungen, die sich aus den beiden Ausdrücken von $X_{z(1,2)}$ und $Y_{z,(1,2)}$ durch Einsetzen der Werthe $z=\pm c$ ergeben, paarweise, wobei die Glieder mit ungeraden Potenzen von c sich fortheben, so erhält man die Werthe von L_2 und M_2, die nach einfacher Zusammenziehung der Glieder lauten:

$$
(41.)\left\{\begin{array}{l}
L_2=\frac{2bc^4(a-b)(3b-4a)}{3a^2}\frac{d}{dx}\Delta\Delta H-\frac{2bc^2(a-b)}{a}\frac{d}{dx}\Delta H_1+ \\
\frac{a-2b}{a}\frac{dH_2}{dx}+\frac{c^2}{4a}(3a-2b)\frac{d^2}{dx^2}(X_{(c)}-X_{(-c)})+\frac{c^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}(X_{(c)}-X_{(-c)}) \\
\qquad +\frac{c^2}{2a}(a-b)\frac{d^2}{dx\,dy}(Y_{(c)}-Y_{(-c)}). \\
M_2=\frac{2bc^4(a-b)(3b-4a)}{3a^2}\frac{d}{dy}\Delta\Delta H-\frac{2bc^2(a-b)}{a}\frac{d}{dy}\Delta H_1+ \\
\frac{a-2b}{a}\frac{dH_2}{dy}+\frac{c^2}{4a}(3a-2b)\frac{d^2}{dy^2}(Y_{(c)}-Y_{(-c)})+\frac{c^2}{4}\frac{d^2}{dx^2}(Y_{(c)}-Y_{(-c)}) \\
\qquad +\frac{c^2}{2a}(a-b)\frac{d^2}{dxdy}(X_{(c)}-X_{(-c)}).
\end{array}\right.
$$

Zu der Aufstellung dieser Gleichungen sind die Werthe von L_1 und M_1 aus (31.) benutzt. Die Functionen L_2 und M_2 haben zwar kein directes Interesse, jedoch sind sie durchaus nothwendig zur Herleitung der Differentialgleichung für H_1, die sich durch Betrachtung der Glieder 2ter und 3ter Ordnung der Kraft Z_z ergeben wird. Die Summe dieser Glieder hat zum Ausdruck:

$$
Z_{z,(2,3)}=(a-2b)\left(\frac{d\,u_{2,3}}{dx}+\frac{d\,v_{2,3}}{dy}\right)+a\frac{d\,w_{3,4}}{dz}.
$$

Nach der Gleichung (38.) hat man:

$$\frac{d^2 w_{3,4}}{dz^2} = -(a-b)\left(\frac{d^2 u_{2,3}}{dx\,dz} + \frac{d^2 v_{2,3}}{dy\,dz}\right) - b\left(\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} + \frac{d^2 w_{1,2}}{dy^2}\right)$$

woraus durch einmalige Integration folgt:

$$a\frac{d w_{3,4}}{dz} = -(a-b)\left(\frac{du_{2,3}}{dx} + \frac{d v_{2,3}}{dy}\right) - b\int\left(\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} + \frac{d^2 w_{1,2}}{dy^2}\right)dz + N_2.$$

Hier bedeutet N_2 die wegen der Integration nach z hinzutretende Function von x, y. Substituirt man diesen Werth in den obigen Ausdruck, so geht derselbe über in:

$$Z_{z(2,3)} = -b\int\left(\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} + \frac{d^2 w_{1,2}}{dy^2}\right)dz - b\left(\frac{d\,u_{2,3}}{dx} + \frac{dv_{2,3}}{dy}\right) + N_2.$$

Ferner hat man nach (37):

$$-b\frac{d\,u_{2,3}}{dx} = a\iint \frac{d^3 u_{0,1}}{dx^3}dz^2 + b\iint\frac{d^3 u_{0,1}}{dx\,dy^2}dz^2 + (a-b)\left(\iint\frac{d^3 v_{0,1}}{dx^2\,dy}dz^2 + \int\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2}dz\right) - z\frac{d\,L_2}{dx} - \frac{d\,P_2}{dx}.$$

$$-b\frac{d v_{2,3}}{dy} = a\iint\frac{d^3 v_{0,1}}{dy^3}dz^2 + b\iint\frac{d^3 v_{0,1}}{dx^2\,dy}dz^2 + (a-b)\left(\iint\frac{d^3 u_{0,1}}{dx\,dy^2}dz^2 + \int\frac{d^2 w_{1,2}}{dy^2}dz\right) - z\frac{d\,M_2}{dy} - \frac{d\,Q_2}{dy}.$$

Die Buchstaben P_2 und Q_2 bedeuten unbekannte Functionen von xy, welche durch die 2. Integration der Gleichungen (37.) hinzugekommen. Durch Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck für $Z_{z,(2,3)}$ erhält man:

$$(42.)\quad\left\{\begin{aligned} Z_{z,(2,3)} = {} & a\left(\iint\frac{d^3 u_{0,1}}{dx^3} + \frac{d^3 u_{0,1}}{dx\,dy^2}\right)dz^2 + a\iint\left(\frac{d^3 v_{0,1}}{dx^2 dy} + \frac{d^3 v_{0,1}}{dy^3}\right)dz^2 + (a-b)\int\left(\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} + \frac{d^2 w_{1,2}}{dy^2}\right)dz - z\left(\frac{dL_2}{dx}\right. \\ & \left.+\frac{dM_2}{dy}\right) - \left(\frac{dP_2}{dx} + \frac{dQ^2}{dy}\right) + N_2. \end{aligned}\right.$$

Setzt man hierin $z = \pm c$, wodurch die rechten Seiten Null werden, und zieht beide Gleichungen von einander ab, so fallen die Functionen P_2, Q_2, N_2 fort. Ferner giebt

[illegible] $\int$ [illegible] nur die [illegible] werden transform[illegible] [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] lässt sich [illegible] dieser [illegible] wenn man [illegible] multi[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] zusammen, so [illegible]

$$\frac{b(3a-2b)(38b-37a)}{120a^2} c^5 \Delta\Delta\Delta H - \frac{bc^3(3a-2b)}{6a} \Delta\Delta H_1 + \frac{c^3(3a-2b)}{12a}$$

$$\left(\frac{d}{dx} \Delta (X_{(c)}-X_{(-c)}) + \frac{d}{dy} \Delta (Y_{(c)}-Y_{(-c)})\right).$$

Wird hierzu der Werth:

$$-\frac{bc^5(a-2b)^2}{120a^2} \Delta\Delta\Delta H - \frac{bc^3(a-2b)}{6a} \Delta\Delta H_1 + \frac{c(a-2b)}{a} \Delta H_2$$

addirt, so hat man den Beitrag der 3 Integrale in (42.). Derselbe ist:

$$(44.) \begin{cases} \frac{2bc^5(a-b)(5b-7a)}{15a^2} \Delta\Delta\Delta H - \frac{2bc^3(a-b)}{3a} \Delta\Delta H_1 + \frac{c(a-2b)}{a} \\ \Delta H_2 + \frac{c^3(3a-2b)}{12a} \left(\frac{d}{dx} \Delta (X_{(c)} - X_{(-c)}) + \frac{d}{dy} \Delta (Y_{(c)} - Y_{(-c)})\right). \end{cases}$$

Schliesslich hat man noch den Summandus:

$$-z\left(\frac{dL_2}{dx} + \frac{dM_2}{dy}\right)$$

in (42.) zu berücksichtigen, welcher bei der betreffenden Subtraction den Werth:

$$-c\left(\frac{dL_2}{dx} + \frac{dM_2}{dy}\right)$$

liefert. Dieser ist nach (41):

$$-\frac{2bc^5(a-b)(3b-4a)}{3a^2} \Delta\Delta\Delta H + \frac{2bc^3(a-b)}{a} \Delta\Delta H_1 - \frac{c(a-2b)}{a} \Delta H_2$$

$$-\frac{c^3(3a-2b)}{4a} \left(\frac{d^3}{dx^3} (X_{(c)}-X_{(-c)}) + \frac{d^3}{dy^3} (Y_{(c)}-Y_{(-c)})\right) - \frac{c^3}{4} \left(\frac{d^3}{dx\,dy^2}\right.$$

$$\left.(X_{(c)}-X_{(-c)}) + \frac{d^3}{dx^2\,dy}(Y_{(c)}-Y_{(-c)})\right) - \frac{c^3(a-b)}{2a} \left(\frac{d^3}{dx\,dy^2} (X_{(c)}-X_{(-c)})\right.$$

$$\left. + \frac{d^3}{dx^2 dy} (Y_{(c)}-Y_{(-c)})\right).$$

Letzterer Ausdruck lässt sich, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{c^3}{4} + \frac{c^3(a-b)}{2a} = \frac{c^3(3a-2b)}{4a}$$

ist, auch folgendermaassen schreiben:

$$-\frac{2bc^5(a-b)(3b-4a)}{3a^2} \Delta\Delta\Delta H + \frac{2bc^3(a-b)}{a} \Delta\Delta H_1 - \frac{c(a-2b)}{a} \Delta H_2$$

$$-\frac{c^3(3a-2b)}{4a} \left(\frac{d}{dx} \Delta (X_{(c)}-X_{(-c)}) + \frac{d}{dy} \Delta (Y_{(c)}-Y_{(-c)})\right).$$

Addirt man hierzu (44.), so hat man alle Glieder 2ter und 3ter Ordnung der Kraft Z_z berücksichtigt, welche zu der Differenz der Werthe von $Z_{..}$ in den Ebenen $z =$ [illegible] c einen Beitrag liefern. Diese Differenz muss verschwinden, da die Terme 2ter und 3ter Ordnung von Z_z für die Ebenen $z =$ [illegible] c nach (4.) gleich Null sind. Bei der Addition fällt das Glied [illegible] c [illegible] H_2 heraus. Dieser Umstand ist wesentlich zur Aufstellung der Differentialgleichung für H_2, da H_2 eine noch unbekannte Function von x y ist. Die Differentialgleichung hat die Form:

$$[illegible] - \frac{c^3 (3a - 2b)}{6a} [illegible] = 0$$

[illegible]

$$[illegible] (X - X_{-c}) + [illegible]$$

[illegible] aus (35.) substituiren [illegible]

$$[illegible] - \frac{[illegible] - 2a}{[illegible] - b}$$

[illegible]

[illegible] auf der [illegible] vorkommen [illegible] indem [illegible]

[illegible] Rechnungen [illegible] gleichun- [illegible] in dem [illegible]

§ V.

Aufstellung der Nebenbedingungen für die Differentialgleichungen der Functionen P, Q, H, P_1, Q_1, H_1.

Nach einer im Paragraph I. gemachten Bemerkung dürfen die Randgleichungen (3.) bei der Herleitung der Nebenbedingungen nicht angewendet werden, da die vorstehenden Rechnungen nur mit Ausschluss der Randpartie gelten. An Stelle dieser treten die Gleichungen (9.) und (11.) ein, in welche statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y krummlinige von der Art eingeführt werden sollen, dass die Randcurve der Platte in der einen Curvenschaar enthalten ist. Doch kann man auch überall Polarcoordinaten anwenden, weil ja die Randpartie ausgeschlossen wird. Allerdings tritt der Umstand ein, dass im letzteren Falle das Innere derjenigen Platten, welche von Curven begrenzt werden, die in verschiedenen Richtungen erheblich ungleiche Durchmesser besitzen, nicht vollständig betrachtet werden kann. Nimmt man z. B. an, dass die Platte von einer gestreckten Ellipse begrenzt werde und der Coordinatenanfangspunkt im Mittelpunkt der Ellipse liegt, so würde bei Anwendung von Polarcoordinaten der Radiusvector kleiner bleiben müssen, als die kleine Achse. Dadurch fallen aber in Richtung der grossen Achse Stücke fort, von denen bei Benutzung elliptischer Coordinaten noch ein grosser Theil behandelt werden könnte. Dagegen würden bei einer Ellipse von geringer numerischer Excentricität mit Vortheil Kreiscoordinaten gebraucht werden.

Es soll nun zur Leitcurve des Schnittcylinders eine beliebige Curve derjenigen Schaar, welche die Randcurve in sich enthält, oder bei Anwendung von Polarcoordinaten ein Kreis gewählt werden. In diesem Falle wird bei der

Integration nach s die eine Coordinate constant bleiben und die Integrale in (9.) und (11.) werden Functionen dieser einen Coordinate, indem sich die andere durch die Integration herausgehoben hat. Da nun die rechten Seiten der Gleichungen (9.) und (11.) ebenfalls Functionen derselben Coordinate sind, so erhält man hieraus Angaben für die Bestimmung der Constanten. Die erwähnten Gleichungen lauten, wenn man die Kräfte X_n, Y_n, Z_n durch X_x, X_y, Y_y, X_z, Y_z ausdrückt:

$$(46.)\quad \begin{cases} \iint (X_x \cos \Lambda + X_y \cos M)\, dz\, ds = f_0 + f_1 \\ \iint (Y_x \cos \Lambda + Y_y \cos M)\, dz\, ds = g_0 + g_1 \\ \iint (Z_x \cos \Lambda + Z_y \cos M)\, dz\, ds = h_0 + h_1 . \end{cases}$$

$$(47.)\quad \begin{cases} \iint [(y Z_x - z Y_x) \cos \Lambda + (y Z_y - z Y_y) \cos M]\, dz\, ds \\ \qquad = F_0 + F_1 + F_2 \\ \iint [(z X_x - x Z_x) \cos \Lambda + (z X_y - x Z_y) \cos M]\, dz\, ds \\ \qquad = G_0 + G_1 + G_2 \\ \iint [(x Y_x - y X_x) \cos \Lambda + (x Y_y - y X_y) \cos M]\, dz\, ds \\ \qquad = H_0 + H_1 . \end{cases}$$

Setzt man aus (23.) die Glieder -2ter und -1ter Ordnung der Kräfte X_x, X_y, Y_y in die beiden ersten Gleichungen (46.) ein, so erhält man durch Ausführung der Integration nach z:

$$(48.)\quad \begin{cases} \int \left[\left(\frac{4b}{a}(a-b)\frac{dP}{dx} + \frac{2b}{a}(a-2b)\frac{dQ}{dy} \right) \cos \Lambda + b \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} \right) \cos M \right] ds \\ \qquad = \frac{f_0}{2c} \\ \int \left[b \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} \right) \cos \Lambda + \left(\frac{4b}{a}(a-b)\frac{dP}{dx} + \frac{2b}{a}(a-2b)\frac{dQ}{dy} \right) \cos M \right] ds \\ \qquad = \frac{g_0}{2c} . \end{cases}$$

In gleicher Weise liefern die beiden ersten Gleichungen (47.) Bedingungen für die Function H, wenn man die Glieder der Ordnung —1 und 0 für sich betrachtet. Die Werthe von $X_{z(-1,0)}$ und $Y_{z(-1,0)}$ sind mit Zuziehung der Gleichungen (30.), (31.):

$$X_{z,(-1,0)} = \frac{2b(a-b)}{a}(z^2-c^2)\frac{d(\Delta H)}{dx} + X_{(c)}\frac{z+c}{2c} + X_{(-c)}\frac{z-c}{2c}$$

$$Y_{z,(-1,0)} = \frac{2b(a-b)}{a}(z^2-c^2)\frac{d(\Delta H)}{dy} + Y_{(c)}\frac{z+c}{2c} + Y_{(-c)}\frac{z-c}{2c}.$$

Hierzu hat man die Terme —2ter und —1ter Ordnung der Kräfte X_x, X_y, Y_y zu nehmen, da sie in den genannten Gleichungen mit z multiplicirt vorkommen. Durch Einsetzung dieser Werthe entstehen für H die Bedingungsgleichungen:

$$(49.)\left\{\begin{array}{l} \int'\Big[\Big(\frac{4bc^3}{3}\frac{d^2H}{dx\,dy} - \frac{8b(a-b)c^3}{3a}y\frac{d(\Delta H)}{dx}\Big)\cos\Lambda + \Big(\frac{8b(a-b)c^3}{3a}\frac{d^2H}{dy^2} + \frac{4b(a-2b)c^3}{3a}\frac{d^2H}{dx^2} - \frac{8b(a-b)c^3}{3a}y\frac{d(\Delta H)}{dy}\Big)\cos M\Big]ds \\ = F_0 + F_2 - c\int'' y\Big((X_{(c)} - X_{(-c)})\cos\Lambda + (Y_{(c)} - Y_{(-c)})\cos M\Big)ds \\ \int'\Big[\Big(\frac{8b(a-b)c^3}{3a}x\frac{d(\Delta H)}{dx} - \frac{8b(a-b)c^3}{3a}\frac{d^2H}{dx^2} - \frac{4b(a-2b)c^3}{3a}\frac{d^2H}{dy^2}\Big)\cos\Lambda + \Big(\frac{8b(a-b)c^3}{3a}x\frac{d(\Delta H)}{dy} - \frac{4bc^3}{3}\frac{d^2H}{dxdy}\Big)\cos M\Big]ds = G_0 + G_1 + c\int' x\,[(X_{(c)}-X_{(-c)})\cos\Lambda + (Y_{(c)}-Y_{(-c)})\cos M]\,ds. \end{array}\right.$$

Aus den 3ten Gleichungen (46.) und (47.) lässt sich noch je eine Bedingung für H und P, Q ableiten, wenn man die beiden niedrigsten Ordnungen der betreffenden Kräfte in Betracht zieht. Hierdurch entstehen die Gleichungen:

$$(50.)\begin{cases} \int \Big\{ \Big[2bcx\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{8bc(a-b)}{a} y \frac{dP}{dx} - \frac{4bc(a-2b)}{a} y \frac{dQ}{dy}\Big] \cos \Lambda + \Big[\frac{8bc(a-b)}{a} x \frac{dQ}{dy} + \frac{4bc(a-2b)}{a} x \frac{dP}{dx} - 2bcy \left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right)\Big] \cos M \Big\} ds = H_0 \\ \frac{8bc^3(a-b)}{3a} \int \left(\frac{d(\Delta H)}{dx} \cos \Lambda + \frac{d(\Delta H)}{dy} \cos M \right) ds = c \int \Big((X_{(c)} - X_{(-c)}) \cos \Lambda + (Y_{(c)} - Y_{(-c)}) \cos M \Big) ds - (h_0 + h_1). \end{cases}$$

Führt man die Glieder der 2 nächst höheren Ordnungen der Kräfte X_x, X_y, Y_y, X_z, Y_z in die Gleichungen (46.), (47.) ein, so ergeben sich in analoger Weise Nebenbedingungen für die Functionen H_1, P_1, Q_1. In dieser Weise hat man fortzufahren, falls eine noch grössere Annäherung gewünscht wird, um für die neu hinzutretenden unbekannten Functionen Nebenbedingungen zu erhalten. Auf die Entwicklung derselben soll jedoch verzichtet werden, da die Art und Weise, wie dieselbe vorzunehmen ist, aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist und hier nur die Frage Interesse hat, wie sich Nebenbedingungen für die unbekannten Functionen finden lassen.

Schliesslich möge hier auf eine interessante Beziehung aufmerksam gemacht sein, welche zwischen den in dieser Abhandlung ermittelten Werthen von ξ, η, ζ und den Formeln (130.) im § 39 des Cleb'schen Lehrbuches der Elasticitätstheorie stattfindet. Um dieselbe nachzuweisen, hat man nur nöthig für ξ, η, ζ aus den Gleichungen (24.) und (29.) die Ausdrücke:

$$\xi = P - z\frac{dH}{dx} + \frac{3a-2b}{6a} z^3 \frac{d(\Delta H)}{dx} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{z^2 d^2P}{2dy^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2Q}{dxdy} + z L_1.$$

$$\eta = Q - z\frac{dH}{dy} + \frac{3a-2b}{6a} z^3 \frac{d(\Delta H)}{dy} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2Q}{dy^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2P}{dxdy} + z M_1.$$

$$\zeta = H + \frac{a-2b}{2a} z^2 \Delta H - \frac{a-2b}{a} z \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right) + H_1$$

zu nehmen. Da nach Clebsch die auf die Begrenzungsebenen wirkenden Kräfte und die Schwerkraft Null sein sollen, so hat man für H, P, Q, H_1 nach (30.), (35.), (45.) die Differentialgleichungen:

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2P}{dx^2} + b\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2Q}{dxdy} = 0$$

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2Q}{dy^2} + b\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2P}{dxdy} = 0$$

$$\Delta\Delta H = 0 \qquad \Delta\Delta H_1 = 0.$$

Setzt man $H = -\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{x^2+y^2}{4}$, wo c' eine willkührliche Constante bedeutet, so genügt diese Lösung sowohl der Gleichung $\Delta\Delta H = 0$ als auch den betreffenden Nebenbedingungen (49.) und (50.). Die rechten Seiten dieser Gleichungen verschwinden nämlich, weil die Componente Z auch für die Mantelfläche Null sein soll. Die obige Lösung für H macht aber ebenfalls die linken Seiten gleich Null da die Integrale:

$$\int \cos \Lambda \, ds; \quad \int \cos M \, ds$$

genommen über eine beliebige geschlossene Curve stets verschwinden.

Die obigen Ausdrücke für ξ, η, ζ gehen somit über in:

$$\xi = P + z\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{x}{2} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2Q}{dxdy} + z L_1$$

$$\eta = Q + z\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{y}{2} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2P}{dx\,dy} + z M_1$$

$$(50.)\left\{\begin{aligned}&\int\Big\{\Big[2bcx\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right)-\frac{8bc(a-b)}{a}y\frac{dP}{dx}-\frac{4bc(a-2b)}{a}y\\&\frac{dQ}{dy}\Big]\cos\mathit{\Lambda}+\Big[\frac{8bc(a-b)}{a}x\frac{dQ}{dy}+\frac{4bc(a-2b)}{a}x\frac{dP}{dx}-2b\,cy\\&\qquad\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right)\Big]\cos M\Big\}\,ds=H_0\\&\frac{8bc^3(a-b)}{3a}\int\left(\frac{d(\Delta H)}{dx}\cos\mathit{\Lambda}+\frac{d(\Delta H)}{dy}\cos M\right)ds=c\int\Big((X_{(c)}\\&-X_{(-c)})\cos\mathit{\Lambda}+(Y_{(c)}-Y_{(-c)})\cos M\Big)ds-(h_0+h_1).\end{aligned}\right.$$

Führt man die Glieder der 2 nächst höheren Ordnungen der Kräfte X_x, X_y, Y_y, X_z, Y_z in die Gleichungen (46.), (47.) ein, so ergeben sich in analoger Weise Nebenbedingungen für die Functionen H_1, P_1, Q_1. In dieser Weise hat man fortzufahren, falls eine noch grössere Annäherung gewünscht wird, um für die neu hinzutretenden unbekannten Functionen Nebenbedingungen zu erhalten. Auf die Entwicklung derselben soll jedoch verzichtet werden, da die Art und Weise, wie dieselbe vorzunehmen ist, aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist und hier nur die Frage Interesse hat, wie sich Nebenbedingungen für die unbekannten Functionen finden lassen.

Schliesslich möge hier auf eine interessante Beziehung aufmerksam gemacht sein, welche zwischen den in dieser Abhandlung ermittelten Werthen von ξ, η, ζ und den Formeln (130.) im § 39 des Cleb'schen Lehrbuches der Elasticitätstheorie stattfindet. Um dieselbe nachzuweisen, hat man nur nöthig für ξ, η, ζ aus den Gleichungen (24.) und (29.) die Ausdrücke:

$$\xi=P-z\frac{dH}{dx}+\frac{3a-2b}{6a}z^3\frac{d(\Delta H)}{dx}-\frac{3a-2b}{2a}z^2\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{z^2}{2}\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{a-b}{a}z^2\frac{d^2Q}{dxdy}+zL_1.$$

$$\eta = Q - z\frac{dH}{dy} + \frac{3a-2b}{6a} z^3 \frac{d(\varDelta H)}{dy} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2Q}{dy^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{a-b}{a}$$

$$z^2 \frac{d^2P}{dxdy} + z M_1.$$

$$\zeta = H + \frac{a-2b}{2a} z^2 \varDelta H - \frac{a-2b}{a} z\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right) + H_1$$

zu nehmen. Da nach Clebsch die auf die Begrenzungsebenen wirkenden Kräfte und die Schwerkraft Null sein sollen, so hat man für H, P, Q, H_1 nach (30.), (35.), (45.) die Differentialgleichungen:

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2P}{dx^2} + b\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2Q}{dxdy} = o$$

$$\frac{4b}{a}(a-b)\frac{d^2Q}{dy^2} + b\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{b}{a}(3a-4b)\frac{d^2P}{dxdy} = o$$

$$\varDelta\varDelta H = o \qquad \varDelta\varDelta H_1 = o.$$

Setzt man $H = -\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{x^2+y^2}{4}$, wo c' eine willkührliche Constante bedeutet, so genügt diese Lösung sowohl der Gleichung $\varDelta\varDelta H = o$ als auch den betreffenden Nebenbedingungen (49.) und (50.). Die rechten Seiten dieser Gleichungen verschwinden nämlich, weil die Componente Z auch für die Mantelfläche Null sein soll. Die obige Lösung für H macht aber ebenfalls die linken Seiten gleich Null da die Integrale:

$$\int \cos \varLambda \, ds; \quad \int \cos M \, ds$$

genommen über eine beliebige geschlossene Curve stets verschwinden.

Die obigen Ausdrücke für ξ, η, ζ gehen somit über in:

$$\xi = P + z\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{x}{2} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2Q}{dxdy}$$

$$+ z L_1$$

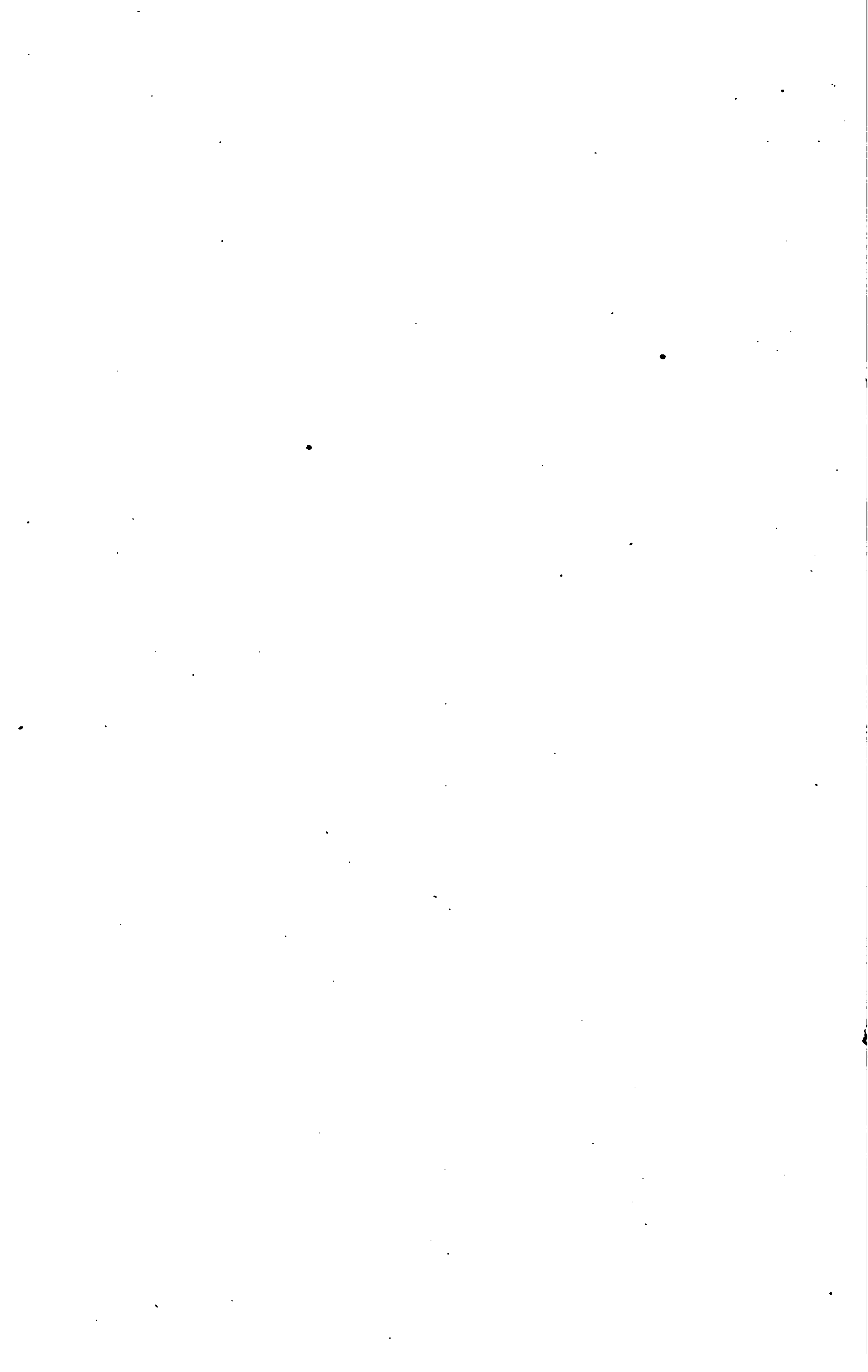
$$\eta = Q + z\frac{ac'}{2(a-b)}\frac{y}{2} - \frac{3a-2b}{2a} z^2 \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{a-b}{a} z^2 \frac{d^2P}{dxdy}$$

$$+ z M_1$$

Curriculum vitae.

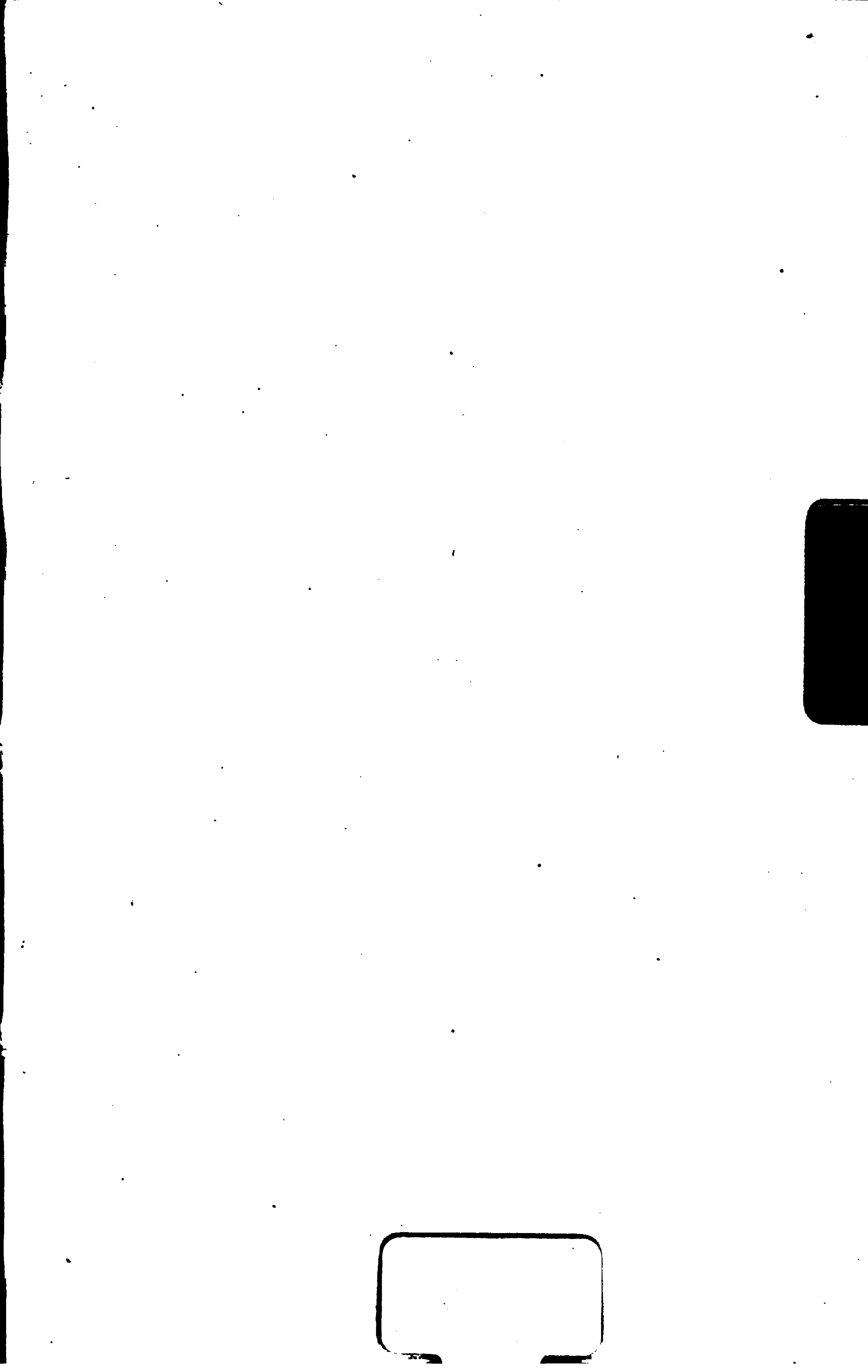
Ich, Hugo Oeltjen, Sohn des Landesthierarztes Gerd Oeltjen in Eutin, bin am 12. Januar 1857 zu Oldenburg im Grossherzogthum geboren und im lutherischen Glauben erzogen. Ostern 1866 in das Gymnasium zu Eutin aufgenommen, gehörte ich demselben bis Ostern 1876 an. Nach bestandener Maturitätsprüfung bezog ich zunächst die Universität Leipzig, um Mathematik und Physik zu studiren. Während der drei Semester meines dortigen Aufenthalts besuchte ich die Collegien der Herren Bruhns, Hankel, Harnack, Kolbe, Leuckart, Mayer, Scheibner, Seydel, Strümpell, Voigt, Zöllner. Nach meiner Michaelis 1877 erfolgten Uebersiedlung auf die Universität Berlin hörte ich bis Ostern 1879 Vorlesungen bei den Herren du Bois-Reymond, Bruns, Förster, Helmholtz, Hofmann, Kirchhoff, Kummer, Neesen, Tiemann, Wangerin, Weierstrass. An der Universität Kiel, bei welcher ich Ostern 1879 immatriculirt wurde, besuchte ich die Vorlesungen der Herren Engler, Karsten, Pochhammer, Thaulow, Weyer.

Sämmtlichen hier genannten Herrn Professoren sage ich meinen verbindlichsten Dank.





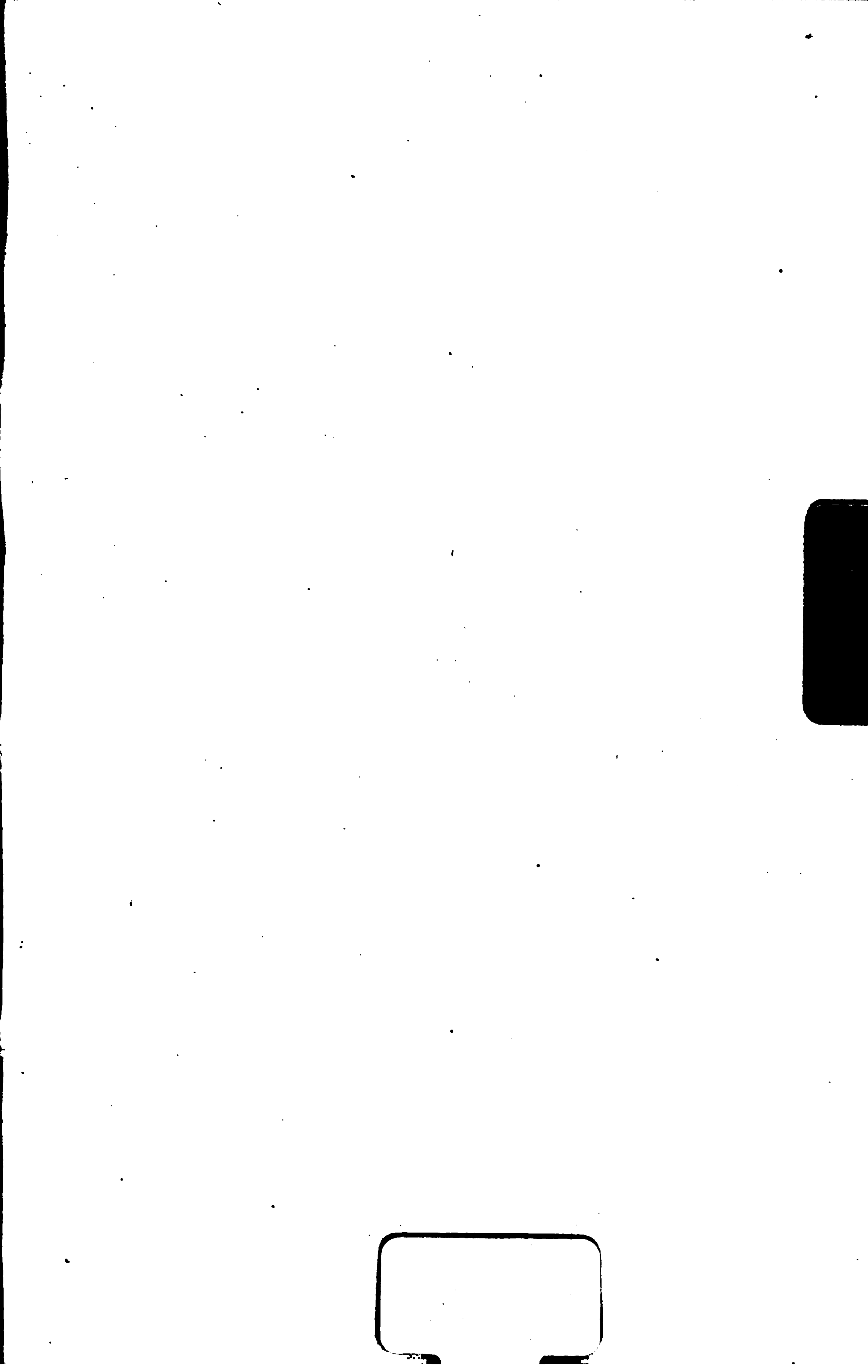






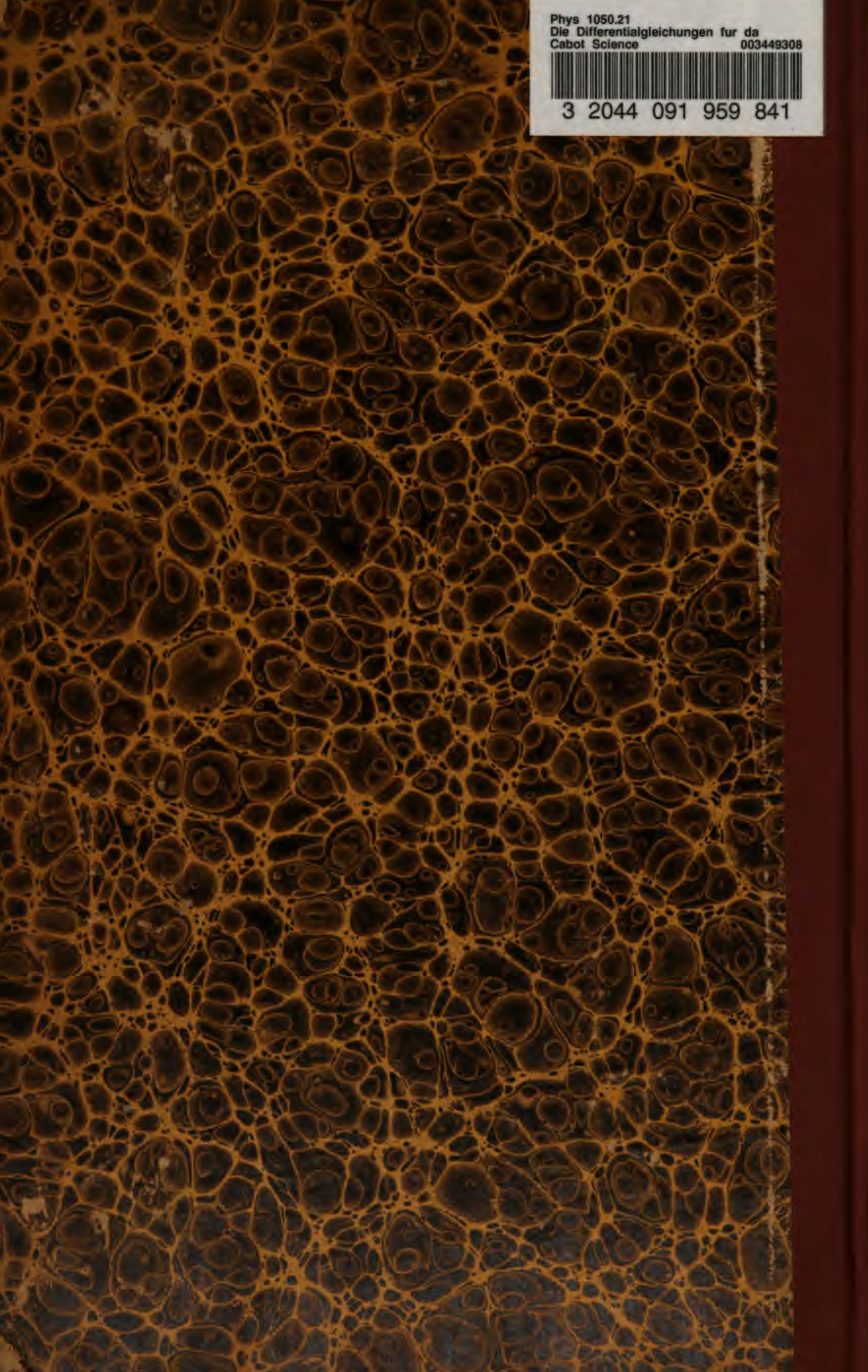












Phys 1050.21
Die Differentialgleichungen fur da
Cabot Science 003449308
3 2044 091 959 841